数学クイズ2023
– 路線図のトポロジー –

担当: 石橋典

東北大学大学院理学研究科数学専攻

皆さんは, 電車の路線図をご存知でしょうか. 駅のホームや電車内にあって, 各路線の停車駅が 1 枚にまとまっている便利なあれです. 今日, 青葉山キャンパスに来るときに地下鉄東西線の路線図を見ながら来たという人もいると思います. あるいは, 普段から電車を使って通学している人にはお馴染みですね.

電車が実際に通る経路 (線路) は実際にはグネグネと曲がっているし, 駅の間の距離も一定ではありませんが, ただ目的地に辿り着きたい乗客にとってこれは不必要な情報です. これらの情報を排除して, 駅の間の「つながり方」だけを効率よく表示したものが路線図といえるでしょう. こういった物の捉え方は幾何学 (図形の研究) の一分野である**トポロジー (位相幾何学)** において非常に典型的な考え方なので, 今日は路線図という身近な題材を出発点にしてその世界に触れてみましょう. 難しい計算は必要ありません！

難易度の目安を星の数で示します (全部解く必要はないので, 興味がある問題に挑戦してみよう！).

$\star$: 肩慣らし.

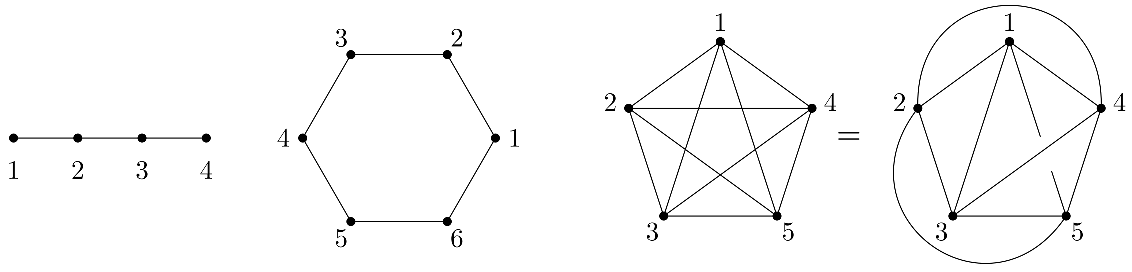
$\star\star$: 紙に書きながら考えてみよう.

$\star\star\star$: 本格的な問題.

1　路線図グラフとオイラー数

幾何学では, ものの「つながり方」を表す概念として**グラフ**を用います. (注意ですが, これは "関数 $y = x^2$ のグラフ" というときのグラフとは全く別物です.)

グラフ $G = (V, E)$ は, 頂点の集合 V と辺の集合 E から成ります. 2 つの頂点 $x, y \in V$ に対して, x と y を結ぶ辺 $e \in E$ が 1 つあるか, あるいは全く無いかのどちらかだとします. 例をいくつか見た方が早いでしょう:



(1)　(2)　(3)　(3′)

上の例は全てグラフです．(1) では頂点が 4 個と辺が 3 個, (2) では頂点と辺が共に 6 個, (3) では頂点が 5 個と辺が 10 個あります (数えてみよう)．

ここでちょっと注意ですが, グラフを考えるときには頂点同士のつながり方だけに着目したいので, 辺同士は交差していないものとして考えます (黒丸の点だけが頂点です)．また, 必ずしも直線で結ぶ必要はないし平面上で描けという規則もありません．例えば, (3) のグラフは (3') のグラフと同じものとみなします．(3') では一つの辺を 3 次元空間の中で少し浮かせて描いていると思ってください．こうした "変形" の自由度がトポロジーでは大切な役割を果たします．

例． 図 1 は仙台市地下鉄の路線図 (左) と, それをグラフとして表示したもの (右) です．右のグラフを, ここでは**路線図グラフ**と呼ぶことにしましょう．

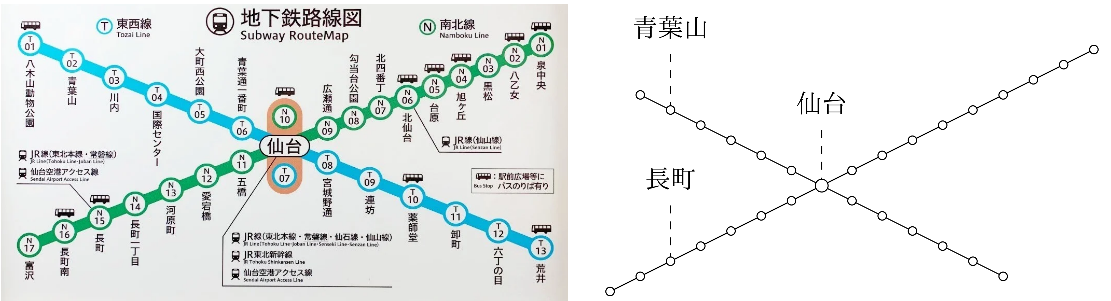


図 1: 左: 仙台市地下鉄の路線図 (車内掲示)．右: 対応する路線図グラフ．

さて, 皆さんが電車に乗るとき, 当然気になるのが「あと何駅で目的地に着くのか？」だと思います．これを言葉にしたのが**グラフ距離**です．グラフ $G = (V, E)$ の 2 つの頂点 $x, y \in V$ の間のグラフ距離 $d(x, y)$ を, x から y へ辿っていくために必要な辺の個数の最小値と定めます．

例． 例えば, (2) のグラフで頂点 1 と頂点 3 の間のグラフ距離は $d(1, 3) = 2$ です．1 から 3 まで行くのに, 2 つの辺 $\{1, 2\}, \{2, 3\}$ を辿るのが最短だからです．他に 4 つの辺 $\{1, 6\}, \{6, 5\}, \{5, 4\}, \{4, 3\}$ を辿る道がありますが, これは最短でないので採用しません．

問題 1 ($\star$)**．** 長町駅と青葉山駅の間のグラフ距離を求めてみよう．

答え

d(長町駅, 青葉山駅) $= 10$.

グラフの概念に少し慣れたところで, お次は名古屋市営地下鉄の路線図です (図 2)．これも各駅を頂点と思って, 路線図グラフを考えることができます．ひとつの駅が 2 つの丸で表示されている箇所がありますが, これは 1 つの頂点とみなすことにします．

さて, 仙台市地下鉄に比べると名古屋市営地下鉄の路線図グラフはやや複雑ですね．もちろん頂点が多いのはその通りですが, 環状線があったり, もう少し "構造的な複雑さ" を持っている感じがすると思います．この複雑さを表現するにはどうしたら良いでしょうか？

ここでは, トポロジーで用いられるひとつの特徴量である**オイラー数**について説明します．これはグラフのある種の複雑さを「数値化」したものといえます．定義はとても簡単: グラフ $G = (V, E)$ のオイラー数 $\chi(G)$ は

$$\chi(G) = |V| - |E| = (\text{頂点の数}) - (\text{辺の数})$$

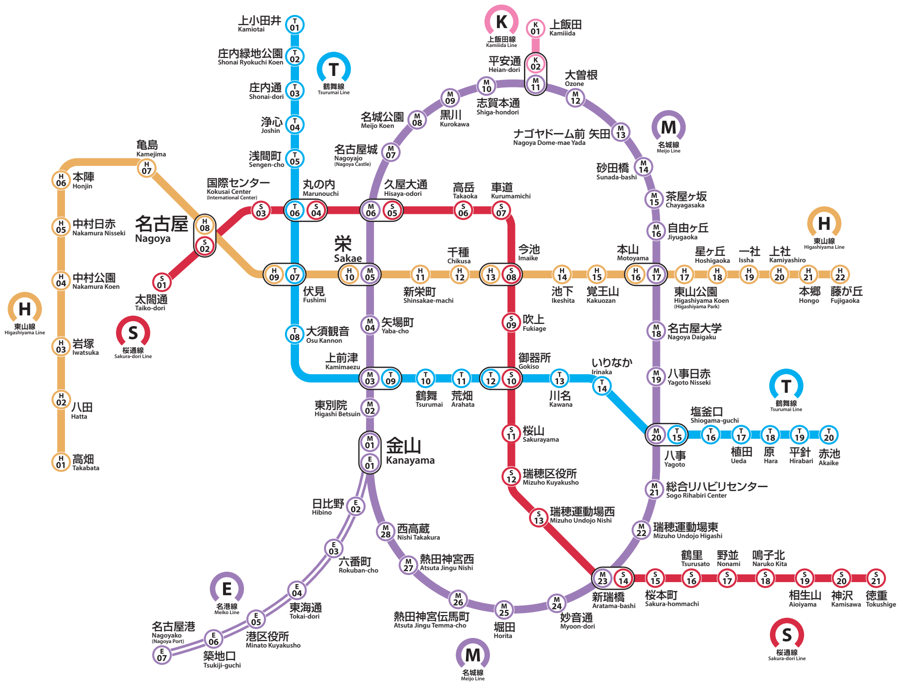


図 2: 名古屋市営地下鉄の路線図.

と定義されます.

問題 2 ($\star\star$)**.** 冒頭のグラフ (1)(2)(3) について, オイラー数を計算してみよう.

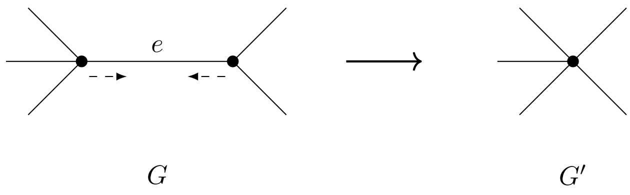
答え

(1) $4-3=1$, (2) $6-6=0$, (3) $5-10=-5$.

さて, 何か違う値が出てきたと思います. では, 実際のところオイラー数は何を “測っている” のでしょうか? (しばし立ち止まって, 上の計算結果をもとに考えてみてください...)

この問いを明らかにするために, 以下のようなグラフの変形操作を考えてみましょう: グラフ G と, その辺 e をひとつ考えます. 次のように, 辺 e を “潰して” 新たなグラフ G' を得る操作を**縮約**と呼び

ます:



ここで, 元々あった頂点 2 つは “結合して”1 つの頂点になると思ってください.

問題 3 ($\star$)**.** 上の図で $\chi(G)=\chi(G')$ となること, つまりオイラー数が縮約で不変であることを確認してみよう.

答え

縮約操作で頂点の数が 1 つ減り, 辺の数も 1 つ減る. つまり $G'=(V',E')$ と書けば, $|V'|=|V|-1$, $|E'|=|E|-1$ なので

$$\chi(G')=|V'|-|E'|=(|V|-1)-(|E|-1)=|V|-|E|=\chi(G).$$

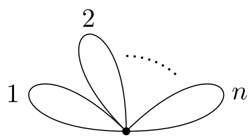
縮約を使うと, オイラー数を変えずにグラフを簡単にしていくことができます. 最後に「一番簡単な」形に直して, オイラー数を計算すればよいのです！

問題 4 ($\star$)**.** 縮約をうまく利用して, 仙台市地下鉄の路線図グラフをなるべく簡単にしてからオイラー数を求めてみよう.

答え

縮約を繰り返すと, 1 点からなるグラフにできる. オイラー数は $1-0=1$.

実は, 任意のグラフは縮約を繰り返すと以下の図形のどれかになることが知られています:



この, 1 つの頂点と n 個のループからなる図形を B_n と書き, **ブーケ**と呼びます. $n=0$ (ループなし) の場合もあり得ます. B_n はループを許している点でグラフではないのですが (擬グラフと呼ばれるものになります), オイラー数の定義はそのままです. 次のように計算できます:

$$\chi(B_n)=(\text{頂点の数})-(\text{辺の数})=1-n.$$

特に, ループの数が多いほどオイラー数の値が下がることが分かります.

問題 5 ($\star\star$)**.** 名古屋市営地下鉄の路線図グラフを縮約を用いてブーケの形にして, オイラー数を求めてみよう.

答え

縮約を繰り返すと B_9 に変形できる．オイラー数は $1-9=-8$.

以上の観察を数学的な言葉にまとめておきます (難しいと思ったら読み飛ばしてください). 2 つのグラフ G と G' は縮約とその逆操作を有限回繰り返すことで互いに移りあうとき, **縮約同値**であるといいます．縮約同値なグラフたちをひとまとめにした集合を, **縮約類**と呼びます．例えば冒頭 (1) のグラフと仙台市地下鉄の路線図グラフは同じ縮約類に属します.

グラフの分類定理

オイラー数は「連結なグラフの縮約類」と「1 以下の整数全体」の間の一対一対応を与える.

ここで, 連結なグラフとは任意の 2 つの頂点の間を辺と辿って移動できることをいいます (今までのグラフは全て連結です). この定理はトポロジーにおいて典型的な, 図形の分類定理のひとつです.

問題 6 ($\star\star\star$)**.** 上の定理を証明してみよう．次の 2 つをチェックすれば OK:

1. 2 つのグラフ G, G' について, $\chi(G)=\chi(G')$ ならば G と G' は縮約同値.
2. 任意の整数 $m \leq 1$ について, $\chi(G)=m$ となるグラフ G が存在する.

答え

(1) ある整数 $n, m \geq 0$ が存在して G, G' はそれぞれ B_n, B_m に縮約同値である.

$$\chi(G)=\chi(B_n)=1-n, \quad \chi(G')=\chi(B_m)=1-m$$

だから, $\chi(G)=\chi(G')$ ならば $n=m$. よって G, G' はともに B_n に縮約同値. 従って G と G' は縮約同値.
(2) 与えられた $m \leq 1$ に対して $n=1-m \geq 0$ とおけば $\chi(B_n)=1-n=m$ となる.

結論　縮約で変わらない “本質的な” ループの数が多いほど, オイラー数の値が下がります．名古屋市営地下鉄と仙台市地下鉄の路線図グラフのオイラー数を比較することで, 複雑さの違いを数値化することができました.

他にも色々なグラフを考えて, オイラー数によりその複雑さを測ってみよう．例えば, 人間関係の複雑さなど...？ (人間を頂点として, 友達関係や SNS のフォロー/フォロワーなどを辺としたグラフを考えることができます.)

2　グラフの平面性

さて, 皆さんは東京に行ったことがあるでしょうか.[1] 図 3 は東京メトロ (地下鉄) の路線図です．恐ろしく複雑です...！が, これの路線図グラフを考えましょう.[2]

[1]筆者は関東出身なので東京メトロをよく利用していました．長年の経験でよく使う路線の構造は把握しているつもりですが, 実際には乗り換えアプリが手放せません.
[2]厳密には, 例えば九段下と神保町の間など 2 つの路線が並走している (頂点間の辺が 2 本ある) 箇所があるため擬グラフになっていますが, 以下の平面性の議論には影響しないのでグラフと言ってしまいます.

図 3: 東京メトロの路線図.

図 3 をよく見ると, 頂点以外で交わってしまっている辺がいくつかあります (例えば左下, 赤坂見附のあたり). 図 1 や図 2 のように, 辺同士が交わらないようにすっきりと描く方法はないのでしょうか. これは実用上も重要な問題ですし, 幾何学的にも興味深いです.

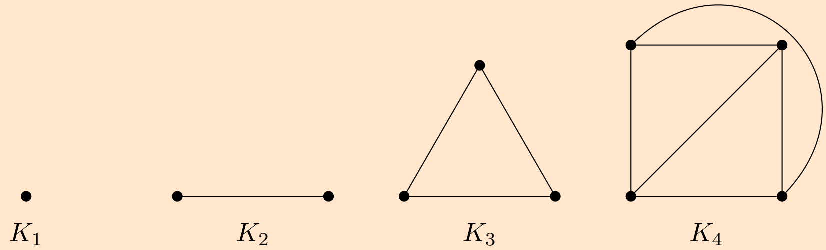
グラフ G は, 各辺が頂点以外で交わらないよう平面上に描くことができるとき, **平面的**であるといいます. 冒頭の例だと, (1)(2) は平面的な例, (3)=(3') は平面的でない例です. 整数 $n \geq 1$ に対し, n 次の**完全グラフ** $K_n = (V_n, E_n)$ を次で定義します:

- 頂点集合 $V_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.
- 辺の集合 E_n を $i \neq j$ なる全ての頂点のペア $\{i, j\}$ からなるものとします. つまり, 全ての頂点同士を辺で繋ぎます.

例えば, 冒頭の (3) は 5 次完全グラフ K_5 です.

問題 7 ($\star\star$)**.** $1 \leq n \leq 4$ について, K_n が平面的であることを示してください (実際に紙の上に描いてみよう).

答え



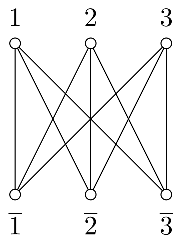
驚くべきことに, 任意に与えられたグラフ G が平面的かどうかの判定条件として次の定理が知られています:

クラトフスキーの定理

グラフ G が平面的であるための必要十分条件は, G が部分グラフとして完全グラフ K_5 または二部グラフ $K_{3,3}$ (の細分) を含まないことである.

一応, 出てきた言葉を説明しておきます (全て理解しなくても大丈夫):

- $G = (V, E)$ の部分グラフとはその名の通り, G に含まれているグラフのことです (正確には, ある部分集合 $V_0 \subset V$ と, それらの間を結ぶ G の辺全体の集合 E_0 からなる $G_0 = (V_0, E_0)$ のこと). 例えば冒頭のグラフ (1) はいくつかの方法で (2) の部分グラフと考えることができます.
- グラフ G のある辺 e の上に新たな頂点を付け足して, e を 2 つの辺に分割すると新しいグラフが得られます. これを G の細分といいます. (この操作はグラフの本質的な情報を変えません.)
- $K_{3,3}$ とは次のようなグラフです:



問題 8 (⋆⋆). クラトフスキーの定理を用いて, K_n $(n \geq 6)$ が平面的でないことを示してみよう.

答え

K_n は K_5 を部分グラフとして含む. 特にクラトフスキーの定理から, 平面的でない.

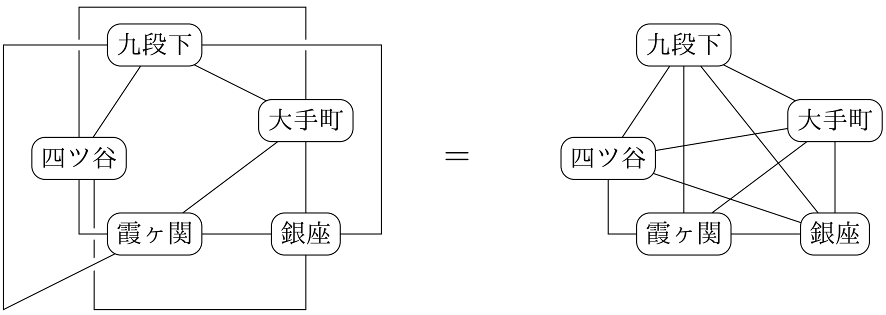
次はこの記事を書いていてふと思いついた問題ですが, 筆者は答えを知りません. 解けたらすごい！

問題 9 (⋆⋆⋆⋆⋆). クラトフスキーの定理を参考に, 東京メトロの路線図グラフが平面的かどうか考えてみよう.

答え

(参加者によって提案されました！他にも有効な解答が複数ありましたが, 一番分かりやすそうなものを載せます.)
平面的でない. 次ページの図のように K_5 の細分が部分グラフとして含まれている. (駅以外で交わる道を見つけるのがポイント.)

結論　グラフが平面上で交わらないように描けるかという問題に関して, クラトフスキーの定理を紹介しました. 路線図の形を (つながり方を壊さないように) 色々と変形してなるべく見やすい形に描きたい, というのはトポロジー的における基本的な考え方と言えますが, 平面性はその過程で生じる自然な問題のひとつです.



3 多面体のオイラー数と, トポロジーへの招待.

多面体とは, いくつかの凸多角形を辺同士で繋ぎ合わせて得られる図形です. 各多角形の全ての辺は他の多角形に繋がっているとしましょう. 多面体 P の頂点の集合を V, 辺の集合を E, 面 (=多角形) の集合を F として $P=(V,E,F)$ と書きます. F の情報を忘れると $G=(V,E)$ はグラフと思えるので, 逆に多面体はグラフに 2 次元の面 F の情報が付け加えられたものといえるでしょう. 多面体 $P=(V,E,F)$ のオイラー数を次のように定義します:

$$\chi(P) := |V| - |E| + |F| = (\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数}).$$

このときは, 次のことが成り立ちます:[3]

多面体定理

任意の凸多面体 P について, $\chi(P)=2$.

問題 10 ($\star\star\star$). 多面体定理を用いて, 正多面体 (すべての面が同じ多角形からなるもの) が図 4 の 5 種類しかないことを証明してみよう.

[3] 多面体 P が凸であるとは, 任意の 2 点 $x,y\in P$ を結ぶ線分が再び P に含まれることをいいます.

答え

$v = |V|$, $e = |E|$, $f = |F|$ をそれぞれ頂点, 辺, 面の数としよう. 多面体定理から,

$$\chi(P) = v - e + f = 2 \tag{3.1}$$

全ての面が n 角形で, 各頂点まわりに k 本の辺が集まっているとして n, k を求める.

- 頂点まわりに着目して辺の数をカウントする. 各頂点まわりに k 本の辺が集まっているので, これらを数えると vk. ただしこれだと各辺が 2 回ずつ計上されているので, $vk = 2e$ が成り立つ.

- 面に着目して辺の数をカウントする. 各面は n 本の辺で囲まれているので, これらを数えると fn. ただしこれだと各辺が 2 回ずつ計上されているので, $fn = 2e$ が成り立つ.

以上を (3.1) に代入すると,

$$2 = \frac{2}{k}e - e + \frac{2}{n}e = \left(\frac{2}{k} - 1 + \frac{2}{n}\right)e.$$

特に $\frac{2}{k} + \frac{2}{n} = \frac{2}{e} + 1 > 1$. 変形すると $(k-2)(n-2) < 4$ となる. これをみたす正整数 n, k を全て求めると,

$$(n, k) = (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)$$

となる. それぞれ正四面体, 正八面体, 正二十面体, 正六面体, 正十二面体に対応する.

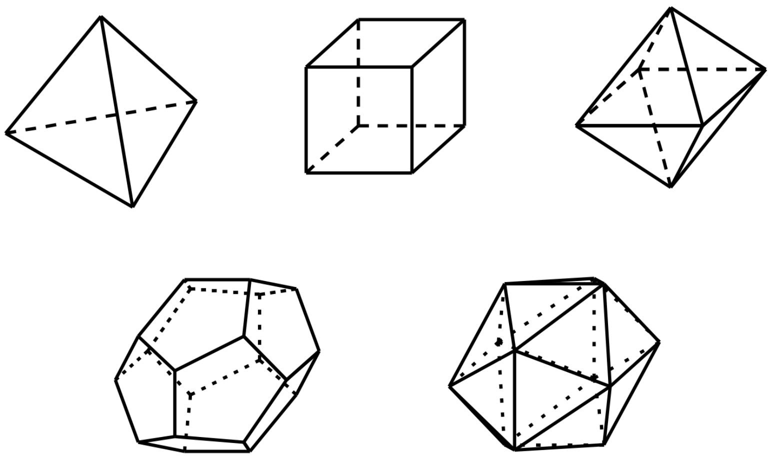


図 4: 5 種類の正多面体

さて, 多面体定理はとても素晴らしいのですが, グラフの場合にはオイラー数 $\chi(G)$ が色々な値をとっており, グラフの "複雑さ" を識別していたことに比べると, 値として 2 しか取らないのは寂しく感じます. オイラー数が他の値を取る図形はないのでしょうか?

以下では, 四角形の「貼り合わせ」を通してそのような例を作ってみます.

問題 11 ($\star\star$)**.** 図 5 のように, 四角形の対辺同士を貼り合わせて新しい図形をつくります.

1. 貼り合わせ結果が図 5 右側のように「ドーナツ状」になっていることを自分なりに納得してみよう. 特に, 左側の図で塗ってある三角形は右側の図ではどの部分に対応するだろうか (塗ってみよう).
2. この図形のオイラー数を計算してみよう (頂点が 1 個, 辺が 3 個, 面が 2 個).

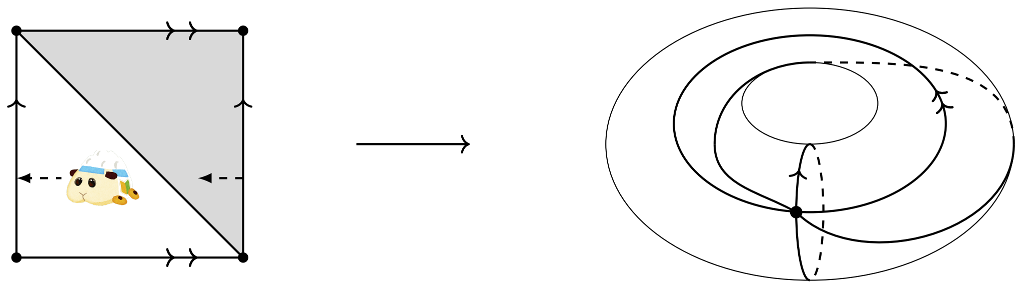
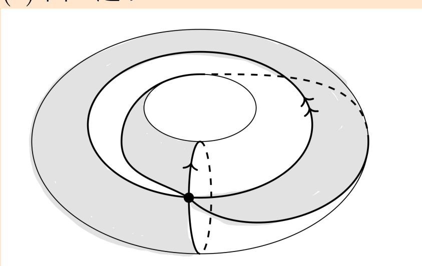


図 5: 四角形の対辺同士の貼り合わせ. 同じ矢印が書いてある辺同士が貼り合って, 1 つの辺になります. ゲームでたまにある「キャラが画面左に出ていくと画面右から現れて, 画面上に出ていくと画面下から現れる」というような状況をイメージしてください. (あの世界はドーナツ状だったのです！)

答え

(1) 図の通り.



(2) オイラー数は $1 - 3 + 2 = 0$.

さて, 実はこの場合のオイラー数は多面体が描かれている「背景」の世界の形を識別しています. (以下ではちょっと難しい用語が並びますが, ふんわりと雰囲気で読んでください.) 2 次元トポロジーにおける基本定理として, 次のことが知られています:

2 次元閉位相多様体の分類定理

オイラー数は「2 次元の閉位相多様体の位相同型類」と「2 以下の偶数全体」の間の一対一対応を与える.

単語がわからないと思いますが, ともかく文章がグラフの分類定理 (p.4) と同じ構造をしていることはわかると思います. これは 2 次元の “閉位相多様体” と呼ばれるクラスの図形の分類定理です. 図 6 に, 2 次元の閉位相多様体の例と対応するオイラー数の値を並べています.

“穴” の数が多いほど, オイラー数の値が下がっています. トポロジーでは, 図形をグネグネと「連続に」変形して移りあうとき, それらを全てひとまとめにした “位相同型類” を扱います. 変形して移りあうものは「同じ」とみなして, それでも残る本質的な「カタチ」に着目するというのがトポロジーです.

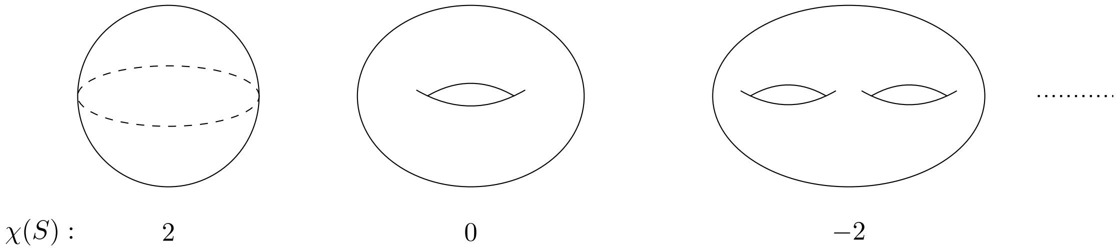


図 6: 2 次元の閉位相多様体の例とオイラー数. 左から球面, ドーナツ (1 人乗りの浮き輪) の表面, 2 人乗りの浮き輪の表面.

オイラー数は, グラフや多面体などの構造にこだわらず位相多様体に対して定義ができます. また, 位相同型 (連続変形) で値が変わらないという性質をもちます. 全ての凸多面体は球面に連続変形できるので (内側から空気を入れて, 膨らませるイメージ), そのオイラー数は全て 2 であるという説明ができるのです.

4　おわりに

今回の数学クイズの内容は, 筆者が東北大学理学部数学科の 3 年生向けに担当している「幾何学概論 B 演習」の導入部分の内容を高校生向けにアレンジしたものです. なんと, 皆さんはもう大学の数学に入門しちゃいましたね！

数学科の実際の授業では, 図形や空間の「貼り合わせ」や「連続変形」などの直感的な概念を曖昧さのない精密な論理で定式化していきます. それにより, 目に見えないほど複雑な図形や, それこそ私たちが内側に住んでいて外から観察することができない宇宙の「カタチ」はどうなっているか？というような問題へのアプローチが可能となるのです.

図の出典

[図 1] 「2 つの路線」のいろんな表現@仙台市地下鉄, https://note.com/ino/n/n2440a4ffc753.

[図 2] 名古屋市交通局ホームページ, https://www.kotsu.city.nagoya.jp/jp/pc/subway/routemap.html.

[図 3] 湘南鉄道研究会, 東京地下鉄路線図 (東京メトロ版), https://blog.goo.ne.jp/miznetx/e/4baae67be706a6aec9defc8975e3a7e6.

[図 5] PUI PUI モルカー, https://molcar-anime.com.