2017年度数学クイズ答え

$\boxed{1.1}$ くじを引いた後の所持金の期待値Eを求める.

$$E = \frac{1}{2}\cdot 1500 + \frac{1}{2}\cdot 500$$

$$= 1000.$$

A. どちらでもよい //

$\boxed{1.2}$

$$E = \frac{1}{1億}(1億500) + \frac{1億-1}{1億}(500)$$

$$= 501.$$

A. 買うべきでない // (しかしこれはギャンブルなので、買うか否かは好きにしなさ

$\boxed{1.3}$

0回目　[●×1, ○×1]

1回目　[●×2, ○×1]　[●×1, ○×2]

2回目　[●×3, ○×1]　[●×3, ○×1]　[●×2, ○×2]　[●×2, ○×2]　[●×1, ○×3]　[●×1, ○×3]

上図より黒球1つである確率 P_1 は

$$P_1 = \frac{(1回目の●×1のときの白球の個数)}{(1回目の球の総数)}$$

$$= \frac{2}{6}$$

$$= \frac{1}{3} \quad //$$

1.6

1回目にAの球をとり，2回目にBの球をとればよい．
1回目にAの球をとる確率は $\frac{10}{10}$．
2回目にBの球をとる確率は $\frac{1}{10}$．
よって求める確率は

$$A.\quad \frac{10}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \;/\!/$$

1.7 A. 0 //

1.8 求める確率は5回連続Aの球をとる確率Pに等しい．

$$P = \frac{10}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{8}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{6}{10}$$

$$= \frac{3024 \;\cancel{6324}}{10000} \qquad A.\ P \overset{<}{\cancel{\geq}} \frac{1}{2} \;/\!/$$

1.9 n回目に初めて2種のクーポンがそろう確率を P_n とする．

$$P_n = \cancel{\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}} \; 10$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} \times 2$$

よって求める値は以下のとおり．

$$E = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot P_n$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{2}\right) \times 2$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}\right) \times 2$$

$$= \frac{3}{2} \times 2 \;/\!/ = 3 \;/\!/$$

※ 3つ目の等式は

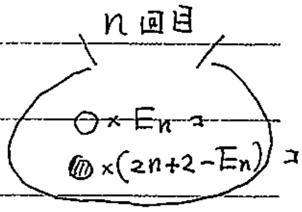
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

の両辺を微分したものを用いた．

$\boxed{2.1}$

E_n を n 回目の白球の個数の平均値とする。

以下の関係式が成り立つ。



$$E_{n+1} = \underbrace{\frac{2n+2-E_n}{2n+2}}_{\left(\substack{n+1\text{回目に白球} \\ \text{が}E_n\text{コである} \\ \text{確率}}\right)} \cdot E_n + \underbrace{\frac{E_n}{2n+2}}_{\left(\substack{n+1\text{回目に白球} \\ \text{が}E_n+1\text{コである} \\ \text{確率}}\right)} (E_n + 1)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2(n+1)}\right) E_n .$$

よって、

$$E_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{2(n-1)}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
E_n &= e^{\log E_n} \\
&= e^{\left\{\log\left(1+\frac{1}{2n}\right) + \log\left(1+\frac{1}{2(n-1)}\right) + \cdots + \log\left(1+\frac{1}{2}\right)\right\}} \\
&\approx e^{\left\{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n-1)} + \cdots + \frac{1}{2}\right\}} \\
&\approx e^{\frac{1}{2}\log n} \\
&= \sqrt{n} \quad /\!/
\end{aligned}$$

ここで3行目の近似は $\log(1+x) \approx x$,

4行目の近似は

$$\log n = \int_1^n \frac{1}{x}\,dx \approx 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

を用いた。

2.3 A. mathematica を用いる. ($P = \sum_{k=40}^{60} \frac{1}{2^k}\binom{n}{k}$)

2.4

$k-1$ 種のクーポンをもっていて, j 回目に
k 種のクーポンがそろう確率を P_j とする.

$$P_j = \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1}\left(\frac{n-k+1}{n}\right)$$

よって

$$T_k - T_{k-1} = \sum_{j=1}^{\infty} j P_j$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} j \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1}\left(\frac{n-k+1}{n}\right)$$

$$= \frac{n-k+1}{n} \frac{1}{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^2}$$

$$= \frac{n}{n-k+1}$$

//