

研究の概要

理学研究科 数学専攻 博士課程 3年 牛越恵理佳 (うしこし えりか)

牛越恵理佳氏は、流体力学の基礎方程式である非圧縮性粘性流体の運動方程式であるストークス方程式の境界値問題に対するアダマール変分公式を研究している。アダマール変分公式は、最も簡潔な楕円型偏微分方程式であるラプラス方程式に対して、領域の摂動に対するグリーン関数や固有値の変化を摂動パラメータの展開公式の第一次近似を与える公式として知られていた。1950年代前半の関数論の手法を用いたシッファー-スペンサー (Schiffer-Spencer), あるいはガーベディアン (Garbedian) 等の研究に始まり、わが国において1980年代前半に、藤原大輔, 小澤真, 青本和彦らによる関数解析学的手法で研究が進展した。

牛越氏は、流体力学の基礎方程式であるストークス方程式に対して体積が保存される領域摂動の条件下でアダマール変分公式を確立した。パラメトリクスを構成する手法と楕円型方程式系の解のアプリオリ評価式を用いる手法の2つの証明方法を開発したことが特に注目できる点である。前者の方法は、グリーン関数を全空間の基本解を切り落とし関数によって近似するパラメトリクスを用いて計算するものであるが、ソレノイダルベクトル場の構成にボゴフスキー (Bogovskii) の発散公式を適用した巧妙な技法である。与えられた1-パラメータによる摂動領域を、体積を保つ微分同相写像によって固定領域に写し、変数係数を有する連立方程式系を1-パラメータの計量をもつリーマン多様体上のストークス方程式と見なす手法を適用したことは注目される。この手法は元来、井上脇本によって時間に依存して移動する領域におけるナビエ-ストークス方程式を解くために考察されたものではあるが、時間定常的問題であるところのアダマール変分公式導出に適用した牛越氏の独創性は高く評価される。一方、後者の証明方法は、変換された変数係数をもつ偏微分方程式をパラメータに関して形式的に微分することによってアダマール変分公式を導出するという単純明快なアイデアである。しかしその形式計算の正当化のためには、グリーン関数のパラメータに関する微分可能性を証明する必要がある。そこで牛越氏は、ストークス方程式のシャウダー型評価を用いて、その微分可能性を明らかにした。この手法は前者に比較して簡素であるだけでなく、速度ベクトル場に加えて圧力関数のグリーン関数に対するアダマールの変分公式をも導出できるという利点がある。牛越氏は最近、この手法をより一般化することを試み、グリーン関数の高次変分公式を得ることに成功した。実際、領域の摂動が微小パラメータに関して何階か微分可能であれば、連続性から微分可能性を導出した方法を逐次高階微分に適用することが可能であり、所謂ブートストラップ法により任意の微分階数のアダマール変分の存在とその表現公式が得られる。牛越氏はその卓越した計算力で、ストークス方程式のグリーン行列の高階変分が、非斉次境界条件を満たす斉次ストークス方程式の解となることを発見した。これは、単に非圧縮粘性流体の方程式系に留まらず、少なくとも定数係数の連立系楕円型境界値問題へのアダマール変分公式の導出へと一般化される見込みの高い汎用性を備えた優れた手法である。

以上のように牛越恵理佳氏は大学院博士課程の学生でありながら、すでに崇高な問題意識、豊富な数学的知識および卓越した解析計算の技量を有する研究者のレベルにある。