研究の概要

理学研究科 数学専攻 博士後期課程２年
B1SD1007 河井　公大朗

微分形式から定まる幾何構造として、シンプレクティック構造、接触構造、ケーラー構造などがある。本研究では、ある３次微分形式で特徴づけられる G_2 多様体について考察した。G_2 多様体は $Spin(7)$ 多様体とともに、直交群より真に小さなホロノミー群をもつ特殊多様体で、複素多様体として議論される Calabi-Yau 多様体や四元数ケーラー多様体と異なり、本質的に実多様体で論じる必要があるためその歴史は新しく、未知の部分も多い。

一方、ケーラー多様体の複素部分多様体はホモロジー類の中で体積を最小にする。この性質の一般化として calibrated 部分多様体が定義され、カラビ・ヤウ多様体の特殊ラグランジュ部分多様体、G_2 多様体の中の(co)associative 部分多様体はその例である。これらは物理学からも注目を集めており、カラビ・ヤウ多様体、および G_2 多様体のミラー対称性が、これらの部分多様体を用いて説明されることが予想されている。しかし、これらは非線形偏微分方程式により定義されており、具体的な構成は難しい。

１．最初に、運動量写像を一般化した多重運動量写像を用いて、(co)associative 部分多様体の特徴づけ、具体的構成に取り組んだ。これは修士論文（Kodai Mathematical Journal より出版済）における、運動量写像を用いた部分多様体の構成法の拡張である。

トーラス作用で不変な場合、(co)associative 部分多様体を商空間の中の概正則曲線、特殊ラグランジュ部分多様体等を用いて特徴づけた。これにより岩澤多様体の錐の上にいくつかの具体例の構成を行ったが、今後その更なる応用が期待できる。

２．次に、Lie 群の対称性を用いて coassociative 部分多様体の具体的構成を行った。作用が余等質性１の場合、上記 PDE は軌道空間上の ODE に帰着できる。これにより R^7、S^4 の反自己双対束上のすべての $SU(2)$、$T^2\times R_{>0}$ 不変な coassociative 部分多様体を与える具体的な微分方程式を導いた。特に $SU(2)$ 作用の場合は、解をすべて具体的に決定した。

先行の手法と異なり、R^7 で四元数を用いずに計算したことで、S^4 の反自己双対束上においても例を多数構成でき、更にその位相構造も明らかにした。これらは既存の研究に比べて、単純かつ具体的な式を与えたことが特色で、解を実際に求めることを可能にした。こうした具体性は coassociative 部分多様体のより明確な理解に貢献するものである。

３．次に、nearly parallel G_2 多様体の中の associative 部分多様体の無限小変形の空間をある微分作用素の固有空間として特徴づけ、具体的な場合にその空間を考察し、剛性を示した。ここで nearly parallel G_2 多様体とは、その錐が $Spin(7)$ 多様体となるもので、７次元佐々木・アインシュタイン多様体などを含む。また associative 部分多様体は佐々木多様体内の special Legendrian 部分多様体を含み、その対象は大変広い。これらはいまだ発展途上の分野で未知の部分が多く、さきがけ的な役割を担う研究である。