研究概要：Kähler 幾何における非線形問題と正値性

理学研究科　数学専攻　村上 怜

幾何において，解析的手法は大域的な幾何構造を理解するための強力な枠組みとして確立しつつある．Kähler 幾何では，この解析的手法が顕著な成功を収めており，微分幾何と代数幾何の間の深い対応関係を明らかにしてきた．例えば，小林–Hitchin 対応では，ベクトル束における Hermitian–Einstein（HE）計量の存在（微分幾何的概念）が，幾何学的不変式論に現れる安定性（代数幾何的概念）と対応する．

Yau による Calabi 予想の解決は，Calabi-Yau 幾何の誕生や代数幾何への幅広い応用を与えたが，その本質は，直線束の曲率の正値性の下，Monge-Ampère（MA）方程式と呼ばれる非線形偏微分方程式の可解性を示したことにある．すなわち，方程式の可解性と微分幾何的正値性を関連づけている．さらに，小平埋め込み定理や中井–Moishezon 判定法は，曲率の正値性を豊富性や数値的正値性といった代数幾何的正値性で特徴づける．これらにより，MA 方程式に対しては「可解性・微分幾何的正値性・代数幾何的正値性」が密接に結びついている．

私はこの観点から，J 方程式，変形 Hermitian-Yang-Mills（dHYM）方程式，Hessian 商方程式，および Demailly 方程式を対象として，可解性および対応する正値性を研究してきた．

J 方程式および dHYM 方程式は，Kähler 幾何における標準計量の存在問題やミラー対称性の文脈で現れる非線形偏微分方程式である．[1] では，これらの方程式の可解性に関して研究し，正則沈め込み $\pi : X \to B$ において，底空間 B と各ファイバー $\pi^{-1}(b)$ $(b \in B)$ で方程式が解けるならば，全空間 X でも方程式が解けることを示した．特に dHYM 方程式では，従来よく研究されてきた優臨界位相の範囲を超えて可解性を示しており，この結果を用いて可解性が成り立つ非自明な具体例を構成した．

J 方程式および（優臨界位相での）dHYM 方程式においても，可解性と正値性が対応する．そこで，正値性が成り立たない半正値的状況において，何らかの弱い意味での解は見出せるかという問いが挙がる．[2] では，複素 2 次元でこの問いに答えた．J フロー・dHYM フローと呼ばれる方程式に対応する自然な力学系を解析し，これらのフローが MA 方程式の弱解（特異性を持った広義の意味での解）に収束することを示した．これにより，この弱解が半正値的状況下での自然な解であることが得られた．

[3] では，Hessian 商方程式の可解性と正値性の対応を研究した．Hessian 商方程式は MA 方程式や J 方程式を含むより広い非線形偏微分方程式の族である．私は，中井-Moishezon 型の数値的正値性を導入し，Székelyhidi による予想と合わせて，この条件が可解性を特徴づけると予想した．そして，射影空間束および半豊富直線束の第一 Chern 類に対して，この予想を証明した．この結果は，可解性・微分幾何的正値性・数値的正値性の対応が，より広い非線形方程式で成立する原理であることを示唆する．

以上の結果は直線束に関する方程式の可解性や正値性であったが，[4] ではこの対応原理をベクトル束へと拡張した．Griffiths はベクトル束での曲率の正値性を導入し，代数幾何的条件である豊富性と対応することを予想した．ベクトル束が階数 1 の場合，すなわち直線束の場合は上述の小平埋め込み定理により成り立つ．さらに，底多様体が複素 1 次元の場合にも成り立つことが知られている．Demailly は，MA 型・HE 型の連立方程式（Demailly 方程式）を導入し，その可解性を通した Griffiths 予想の解決へのアプローチを提案した．私は，1 次元複素多様体上で Demailly 方程式を解析し，豊富性から可解性が従うことを示した．その結果として，1 次元の場合に Griffiths 予想の新しい解析的証明を与えた．

参考文献

[1] R. Murakami, *J-equations and deformed Hermitian-Yang-Mills equations on holomorphic submersions,* Math. Z., **312** (2026), no. 3, Paper No. 91.

[2] R. Murakami, *Weak limits of the J-flow and the deformed Hermitian-Yang-Mills flow on Kähler surfaces: boundary cases,* preprint, available at arXiv:2404.00501v1, to appear in Ann. Global Anal. Geom.

[3] R. Murakami, *Numerical criteria on the complex Hessian quotient equations with the Calabi symmetry,* preprint, available at arXiv:2412.03113v2, to appear in Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.

[4] R. Murakami, *An analytic proof of Griffiths' conjecture on compact Riemann surfaces,* Math. Ann., **394** (2026) no. 2, 36.