

研究概要：測度距離葉層と直積空間およびその収束

理学研究科 数学専攻 数川大輔

完備可分距離空間とその上の Borel 確率測度の組を測度距離空間という。測度距離空間は、典型的にはリーマン多様体の収束・崩壊理論においてリーマン多様体列の極限空間として登場し、昨今では、測度距離空間自体の上で幾何学や解析学が展開できるまでにその研究は急速に発展している。測度距離空間上の幾何解析を研究する上で、測度距離空間の収束理論が重要な役割を果たす。測度距離空間の収束理論とは、測度距離空間列が極限空間に収束するときに、空間列の各空間が同時に満たす条件を極限空間も満たすかという「条件の安定性問題」や測度距離空間に対する様々な不変量が連続性を持つかという「量の連続性問題」などを扱う理論である。測度距離空間の収束概念はこれまでに様々なものが定義され、多くの研究がなされている。

Gromov [3] はボックス収束と呼ばれる収束概念を導入した。これは現在では測度距離空間の標準的な収束概念の 1 つであり、様々な研究結果が知られている。中でも Gigli-Mondino-Savaré [2] による“曲率次元条件の安定性”と“Cheeger エネルギー汎関数の Mosco 収束”は重要な結果である。曲率次元条件は測度距離空間における Ricci 曲率の下限を表す条件であり、Cheeger エネルギー汎関数はリーマン多様体上の Dirichlet エネルギー汎関数の測度距離空間への一般化である。Cheeger エネルギー汎関数の Mosco 収束は Laplacian の固有値の半連続性などの強力な結果を導く。

ここで、次のような現象が知られている。半径 \sqrt{n} の n 次元球面の Ricci 曲率や Laplacian の固有値は、 n が十分大きいとき、Gauss 空間のものに非常に近い。この現象には半径 \sqrt{n} の n 次元球面の $n \rightarrow \infty$ での挙動が大きく関係していると予想されているが、この球面列は $n \rightarrow \infty$ でボックス収束しないことが知られており、この現象を従来の収束理論で説明するのは困難であった。この問題の本質的な困難さの 1 つは次元が無限大に発散してしまうことにある。本研究の 1 つ目の成果 [4] は、近年 GalazGarcía-Kell-Mondino-Sosa [1] によって導入された測度距離葉層を用いて、Gigli-Mondino-Savaré の結果の一般化を得たことである。この結果は次元が無限大に発散する場合にも適用でき、先の球面列の現象について収束理論による説明を一部与えることに成功した。

また、ボックス収束の良い性質の 1 つとして、“直積空間の収束性”がある。これは、収束する 2 つの空間列に対してそれらの直積空間の列が極限空間どうしの直積空間に収束するという性質である。Gromov [3] は、ボックス収束と同時に、集中と呼ばれる収束概念を導入した。集中はボックス収束よりも弱い収束を与え、次元が無限大に発散する空間列も数多く収束することが知られている。この集中に関する直積空間の収束性は(ある特殊な場合を除いて)知られていなかった。本研究の 2 つ目の成果 [5] は、この集中に関して、直積空間の収束性が成り立つための必要十分条件を明らかにしたことである。この結果の意義は、ボックス収束では常に成り立つ直積空間の収束性が、集中ではある条件下に限り成り立つということを発見し、2 つの収束概念の違いについて言及したことにある。この結果を用いて、集中する測度距離空間列の新たな例を構成することにも成功した。

参考文献

- [1] F. Galaz-García, M. Kell, A. Mondino, and G. Sosa, *On quotients of spaces with Ricci curvature bounded below*, J. Funct. Anal. **275** (2018), no. 6, 1368–1446.
- [2] N. Gigli, A. Mondino, and G. Savaré, *Convergence of pointed non-compact metric measure spaces and stability of Ricci curvature bounds and heat flows*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **111** (2015), no. 5, 1071–1129.
- [3] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Reprint of the 2001 English edition, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007.
- [4] D. Kazukawa, *Convergence of energy functionals and stability of lower bounds of Ricci curvature via metric measure foliation*. preprint (2018), arXiv:1804.00407, to appear in Comm. Anal. Geom.
- [5] ———, *Concentration of product spaces*. preprint (2019), arXiv:1909.11910.