研究概要：高階放物型方程式の漸近解析

理学研究科 数学専攻　　三宅 庸仁

拡散を伴う物理現象は一般に二階放物型方程式を用いて記述される．一方, 薄膜の結晶成長のような, 表面拡散を伴う物理現象を記述する数理モデルの多くは, 高階放物型方程式を用いて記述される．例えば, 薄膜のエピタキシャル成長を記述する数理モデルが高階放物型問題として Zangwill ([4]) 等によって提唱されている．本研究の目的は, 上述の数理モデルを含め, 多重調和作用素と呼ばれる高階微分作用素から成る主要部をもつ線形及び半線形高階放物型方程式の解の漸近挙動を数学的に解析することである．

二階放物型方程式と高階放物型方程式の数学的取り扱いは大きく異なる．実際, 二階放物型方程式を解析する上で有効な手法である最大値原理は, 高階放物型方程式に対しては一般に破綻する．それに伴い, 比較原理等の最大値原理を基盤とした解析手法を適用することは困難となる．高階放物型方程式を研究する目的の一つは, 最大値原理に頼らない解析手法を構築することである．高階放物型方程式に対する研究を蓄積することによって, 最大値原理に頼らない新たな解析手法の構築へと繋がることが期待される．

二階放物型方程式と高階放物型方程式では, それぞれの解の基本的性質も異なる．例えば, 二階放物型方程式に対する初期値問題については, 「任意の正値な初期値に対して, 解は時空上で大域的に正となる」という正値性保存則が成り立つ．この事実は, 最大値原理や基本解の正値性から容易に従い, 解の正値性は二階放物型方程式に適用可能な解析手法の多様さや得られる解析結果の精密さの源泉となる．一方, 高階放物型方程式においては, 正値性保存則は成り立たない．解の正値性の欠落は, 高階放物型方程式を数学的に解析する際の解析的困難の一因となる．本研究の目的の一つは, 線形及び半線形多重調和熱方程式の初期値問題に対する正値性保存則の崩壊メカニズムを調べることである．これについて, Grunau–Miyake–Okabe [1] 及び博士論文にて, 線形及び半線形多重調和熱方程式の初期値問題について, 解が正値関数となるための十分条件の導出に成功している．

本研究のもう一つの目的は, 薄膜のエピタキシャル成長を記述する数理モデル等に現れる勾配型非線形項をもつ高階放物型方程式の解の漸近挙動を調べることである．本研究で扱う勾配型非線項は, p-Laplacian 型の二階微分項である．このような非線形項を有する高階放物型問題は, 「あるエネルギー汎関数に対する最急降下運動を記述する」及び「総量を保存する」という特徴的な二つの性質をもつ．したがって, このような高階放物型問題に対する解析を行うことにより, Cahn–Hilliard 方程式や表面拡散流方程式といった総量保存則をもつ高階勾配流方程式に対する新たな解析手法の構築に繋がると考えられる．本研究では, 上述の方程式について「全空間上での初期値問題」として扱った場合, 及び 「有界領域上における初期値境界値問題」として扱った場合における漸近解析手法を二種類提示することに成功した．具体的には, Ishige–Miyake–Okabe [2] 及び博士論文では, 全空間上での初期値問題について, 一様局所弱 Lebesgue 空間と呼ばれる関数空間上における可解性を証明し, これを応用することで「時間大域解の存在」及び「最大存在時間が有界となる解の漸近挙動の導出」を行なった．また, Miyake–Okabe [3] 及び博士論文では, 有界領域上における初期値境界値問題について, エネルギークラス, 及び L^2 クラスでの一意可解性を Galerkin 法に基づいて証明し, ポテンシャル井戸の方法を併用することで時間大域解の存在とその漸近挙動を証明した．

参考文献

[1] H.-Ch. Grunau, N. Miyake and S. Okabe, *Positivity of solutions to the Cauchy problem for linear and semilinear biharmonic heat equations*, Adv. Nonlinear Anal. **10** (2021), no. 1, 353–370.

[2] K. Ishige, N. Miyake and S. Okabe, *Blowup for a fourth-order parabolic equation with gradient nonlinearity*, SIAM J. Math. Anal. **52** (2020), no. 1, 927–953.

[3] N. Miyake and S. Okabe, *Asymptotic behavior of solutions for a fourth order parabolic equation with gradient nonlinearity via the Galerkin method*, Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's, Springer INdAM Series, to appear.

[4] A. Zangwill, *Some causes and a consequence of epitaxial roughening*, J. Crystal Growth **163** (1996), no. 1, 8–21.