

研究概要: 函数解析的方法による移流拡散方程式の特異極限問題と解の漸近挙動について

理学研究科 数学専攻 勝呂 剛志

移流拡散方程式は天文学や半導体モデル, あるいは生物化学等の多様な分野で観察される問題であり, それぞれの数理モデルでのパラメータの極限操作によって導出される. そのため, 大きく異なる物理スケールに登場する普遍的な数理構造を代表していると考えられる. この方程式は, 拡散方程式にポテンシャルで与えられる非線形干渉項が作用した非線形偏微分方程式であり, 偏微分方程式論の典型的な形式である, 楕円型, 放物型, 双曲型の3つのタイプを内在する最も単純な問題である. 移流拡散方程式の初期値問題においては, その解の時空間変数に関するスケール不変性が従う. スケール不変性を擁する非線形偏微分方程式の初期値問題の適切性を考える上で, 指導原理となるのが Fujita–Kato の原理である. Fujita–Kato の原理とは, 方程式を不変とするスケール変換の下でノルムが不変となる函数空間 (これを臨界空間と呼ぶ) において, 問題の時間局所適切性と十分小さい初期値に対する時間大域可解性が同時に得られることを指す. この事実は Fujita–Kato (1964) による非圧縮性 Navier–Stokes 方程式の初期値問題の適切性に関する結果に端を発し, Fujita–Kato の原理と呼ばれる.

数理モデルの設定により, 空間遠方での解の減衰を要請しない枠組みでの議論があり得るが, 移流拡散方程式は複数の未知函数を擁する連立型偏微分方程式であり, 空間遠方の解の情報を空間各点に繰り込む, いわゆる非局所的な問題であることから, 空間遠方での解の減衰を伴わない一様局所 Lebesgue 空間での適切性はほとんど知られていない. 本研究の目的の一つは, こういった一様局所 Lebesgue 空間における移流拡散方程式の初期値問題の適切性を示すことである. スケール構造などの形式の類似した非圧縮性 Navier–Stokes 方程式の初期値問題は, 一様局所 Lebesgue 空間において適切であることが Maekawa–Terasawa (2006) らにより知られているが, 移流拡散方程式が持つ非線形構造において, 熱核との構造的関係が非圧縮性 Navier–Stokes 方程式と異なり平滑化効果の影響が得られないため, 一様局所 Lebesgue 空間における適切性は未解決であった. 論文 [3] において, 一様局所 Lebesgue 空間上のポテンシャルに対する臨界型函数不等式を拡張することで, Fujita–Kato の原理による臨界空間における初期値問題の適切性を証明した. また, 解に対する空間遠方の効果がより強くなるポテンシャルを擁する移流拡散方程式に対しても, 空間遠方と空間局所的な解の振る舞いをそれぞれ独立した Lebesgue 指数で捉えることができる amalgam 空間を用いることで, 臨界空間における適切性を証明した ([5]). 移流拡散方程式の初期値問題が一様局所 Lebesgue 空間において適切であるという結果から, Ogawa–Suguro [2] において, 走化性粘菌のモデルである Keller–Segel 系の緩和時間パラメータの無限大極限を考察し, Keller–Segel 系の解が移流拡散方程式の解に一様局所 Lebesgue 空間上強収束することを示した.

本研究のもう一つの目的は, 移流拡散方程式の解の漸近挙動を調べることである. 移流拡散方程式は質量保存則と Helmholtz 自由エネルギー汎函数の消散性を擁し, 主要項が熱方程式の場合は, Boltzmann–Shannon エントロピーが対応する. 移流拡散方程式の解の減衰や漸近挙動の研究において, 対応するエントロピー汎函数に対する評価が有用であり, 確率密度函数に対するエントロピー汎函数とモーメント, ポテンシャルの関係は函数不等式で記述される. Ogawa–Suguro [1] では, 準線形移流拡散方程式の初期値問題のある時間大域解に対する時間無限大における漸近挙動を示した. その証明の根幹となったのは, 方程式に付随するエントロピー消散性であり, 論文 [4] において考察した一般化エントロピー汎函数に対する対数型 Sobolev の不等式を組み合わせたエントロピー消散法により解の漸近挙動を得た.

参考文献

- [1] Ogawa, T. and Suguro, T., *Asymptotic behavior of a solution to the drift-diffusion equation for a fast-diffusion case*, J. Differential Equations **307** (2022), 114–136.
- [2] Ogawa, T. and Suguro, T., *Maximal regularity on uniformly local spaces and application to a singular limit problem of the Keller–Segel system*, preprint.
- [3] Suguro, T., *Well-posedness and unconditional uniqueness of mild solutions to the Keller–Segel system in uniformly local spaces*, J. Evol. Equ. **21** (2021), 4599–4618.
- [4] Suguro, T., *Shannon’s inequality for the Rényi entropy and an application to the uncertainty principle*, preprint.
- [5] Suguro, T., *Well-posedness of mild solutions to the drift-diffusion and the vorticity equations in amalgam spaces*, preprint.