研究概要: 高階幾何学的変分問題の研究

理学研究科　数学専攻　吉澤研介

滑らかな平面曲線に対し、曲げエネルギーという量が曲率の二乗積分で定義される。曲げエネルギーの臨界点はピアノ線などの弾性体の形状を数学的に記述するモデルとして知られており、その歴史は18世紀にまで遡る。臨界点の持つ数学的な性質に対する興味に加え、弾性体の形状モデルの他に画像処理への応用という実用的な面を持つことから、曲げエネルギーに対する変分問題は現在なお盛んに研究されている。今日でも研究の対象となる理由の一つに、臨界点を特徴付ける曲げエネルギーの Euler—Lagrange 方程式が位置ベクトルについて四階の非線形微分方程式で記述されるという困難点がある。故に基本解の正値性や比較原理などの解析手法が一般に破綻する。閉曲線の場合の曲げエネルギーの臨界点に対する定性的性質は、臨界点の表現公式や安定性、臨界点の曲げエネルギーの定量的な比較まで非常に良く知られている。しかし、開曲線に対する曲げエネルギーの臨界点については、高階性に加え境界条件の取り扱いが絡むため、解析の難易度が格段に増すことが知られている。実際「曲線長一定かつ両端の位置ベクトルが固定された開曲線」という設定 (P) の下での曲げエネルギーの臨界点を求めよという問に対し、臨界点の形状解析や汎函数の定量的な比較に対する結果は数値計算によるものしか得られておらず、特に最小元が一意かどうかは未だに知られていない。本研究では、開曲線に対する曲げエネルギーの変分問題として主に次の問題に取り組んだ:

(A) 設定 (P) の下での曲げエネルギーの臨界点の解析

(B) 曲げエネルギーに対する障害物問題

(A) については、設定 (P) の下での全ての臨界点に対する表現公式を与えた ([5])。公式は狙い撃ち法という常微分方程式の手法を用いることにより得られ、臨界点の形状の特徴を明示的に導くものである。例えば、任意の曲線長に対し自己交差を有する臨界点が存在することや、ある閾値が存在し、与えられた曲線長と端点の距離の比がその閾値を超えるならば、函数のグラフで与えられる臨界点は存在しないことが得られる。閾値の場合に現れる臨界点は rectangular elastica と呼ばれる、古典的に知られた臨界点であることもわかる。さらに、各臨界点の曲げエネルギーの値を定量的に評価することにより、曲げエネルギーの大小による臨界点の完全な順序付けに成功した。さらに、その系として最小元の一意性も得られた。

(B) については函数によりグラフ表示されている曲線に対し、障害物を表す既知函数を下回らないという外的束縛を加えた下での、曲げエネルギーの最小化問題を考察した。問題 (B) に対し、最小元の一意性や最小元の存在を保証するような障害物の仮定の幾何学的な特徴付けは得られていなかった。本研究では、障害物が果たす本質的な役割を捉えるために障害物を対称錐型に制限することで、次の結果を得た ([4]) : 最小化問題を曲線が線対称な枠組みで考えると、障害物の高さにより最小元の存在・非存在が分かれる; 最小元は一意である; 最小元は連続な三階導函数を有さない。証明は最小元がみたす Euler—Lagrange 方程式の直接解析に基づき、証明を通して、問題 (B) の可解性を保証するような障害物の高さの閾値は (A) で得られた rectangular elastica の高さと強く結びつくことがわかる。また、[3] において (B) に対応する時間発展問題の可解性を示し、その時間大域挙動として (B) の問題の解が得られることも示した。

また、曲げエネルギーを一般化した汎函数の変分問題についても考察し、(A) の結果を拡張するような臨界点の定性的な特徴付けを与えた ([2])。また、(B) のような障害物問題を考察し、最小化問題の可解性や最適な正則性も得られた ([1])。

参考文献

[1] A. Dall'Acqua, M. Müller, S. Okabe, and K. Yoshizawa, *An obstacle problem for the p-elastic energy*, preprint (2022), arXiv:2202.09893.

[2] T. Miura and K. Yoshizawa, *Complete classification of planar p-elasticae*, preprint (2022).

[3] S. Okabe and K. Yoshizawa, *A dynamical approach to the variational inequality on modified elastic graphs*, Geom. Flows, **5** (2020), 78–101.

[4] K. Yoshizawa, *A remark on elastic graphs with the symmetric cone obstacle*, SIAM J. Math. Anal., **53** (2021), 1857–1885.

[5] K. Yoshizawa, *The critical points of the elastic energy among curves pinned at endpoints*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **42** (2022), 403–423.