

# 研究概要：圧縮性粘性流体方程式に対するエネルギー保存条件について

理学研究科 数学専攻 青木基記

温度付き圧縮性ナビエ・ストークス方程式は、圧縮性粘性流体力学における基礎方程式である。本方程式は、高速で動く気体など、密度変化が生じる流体の解析に用いられる数理モデルであり、連続の式、運動方程式、そして内部エネルギーの式の3式により構成される方程式系である。本研究では、温度付き圧縮性ナビエ・ストークス方程式の弱解がエネルギーを保存するための数理的条件的条件の研究と類似する初期条件における初期値問題の非適切性の研究を行なった。

はじめに、本研究の動機となった非圧縮性ナビエ・ストークス方程式における先行研究について簡単に述べる。ナビエ・ストークス方程式のエネルギー不等式を満たす時間大域的な弱解の存在が Leray (1934) によって示されている。しかし、弱解がエネルギーを保存するか否かは明らかになっておらず、本方程式の研究の上で重要な問題になっている。Serrin (1963) は解の一意性のため付加条件を、Shinbrot (1974) はエネルギーが保存するための付加条件をそれぞれ示している。Serrin が一意性を示した条件は、初期値問題の適切性の条件と対応した条件であることが知られている。また、Serrin が一意性を示した条件が Shinbrot がエネルギー保存則を示した条件に含まれることから、非圧縮性ナビエ・ストークス方程式に対しては、初期値問題が適切になる関数空間がエネルギー保存則が成り立つ関数空間に含まれていることがわかる。

本研究の目的は、次の2つである。1つ目の目的は、温度付き圧縮性ナビエ・ストークス方程式の弱解がエネルギーを保存するための数理的条件を見出すことである。特に、Shinbrot がエネルギー保存則を示した空間に対応する条件でエネルギー保存則を示す。2つ目の目的は、初期値問題の適切性の空間との比較である。初期値問題の適切性を明らかにすることで、温度付き圧縮性ナビエ・ストークス方程式における初期値問題の適切性のための空間エネルギー保存則の空間の関係について考察した。

温度付き圧縮性ナビエ・ストークス方程式の弱解の存在は Feireisl (2004) によって示されている。この弱解がエネルギーを保存するかは明らかになっていなかった。Aoki-Iwabuchi [1] では、エネルギーを保存するための数理的条件を Shinbrot が課した条件に対応した条件で見出した。また、Aoki-Iwabuchi [2] では、エネルギー保存条件に類似した条件である、臨界 Besov 空間を用いて理想気体の運動を記述する圧縮性ナビエ・ストークス方程式の初期値問題の非適切性を示した。

上記の結果は、理想気体に対しては、エネルギー保存則の条件と初期値問題の適切性の条件に包含関係が成り立たないことを示唆している。実際、今回得られた初期値問題の非適切性の空間とエネルギー保存則の空間について、密度関数と速度場の条件を比較すると、エネルギーを保存するための空間が初期値問題の非適切性が示されている空間を包含している。ここで、温度の空間には包含関係はない。しかし、その点を除くと、類似した条件でエネルギーが保存する肯定的な結果と初期値問題が非適切になる否定的な結果が得られている。この違いは、初期値問題で非適切性を誘発する非線形項が、流速の摩擦によって生じる項であるため、エネルギーの枠組みでは内部エネルギーの相互作用により消失することに起因している。本研究では、初期値問題の非適切性を明らかにし、エネルギー保存則の条件と比較することで、温度付き圧縮性ナビエ・ストークス方程式特有の性質について考察した。

## 参考文献

- [1] M. Aoki and T. Iwabuchi, *Energy conservation law for weak solutions of the full compressible Navier-Stokes equations*, J. Differential Equations **341** (2022), 481–503.
- [2] ———, *On the ill-posedness for the full system of compressible Navier-Stokes equations*, preprint.