研究概要：変分法による不可逆性とエネルギーバランス則を伴う準静的発展方程式の定性的解析

本研究は脆性材料における破壊現象, 特に亀裂の発生および進展を記述する力学的モデルに動機付けられている. Francfort-Marigo は, 亀裂を表す集合 Γ および材料の変形を記述する変位場によって値が定まる Francfort-Marigo エネルギー (以下 FME) と呼ばれる汎関数の最小化問題として, 亀裂発生および進展に関する理論を数学的に定式化した. 材料に加える外力を時間変化させたとき, 対応する亀裂集合は次の 3 つの性質を満たすものとして特徴付けられる. (1)「破壊の不可逆性」: 亀裂集合は時間に関して単調増加である. (2)「エネルギーの片側極小条件」: 時刻 t における亀裂を覆う (つまり "より長い") 亀裂の中で FME は常に最小に保たれる, 言い換えれば, 材料は力学的平衡状態を常に保ちながら時間発展する. (3)「エネルギーバランス則」: FME は外力の変化によってのみ変化し, 自発的な消散はない. これらの性質を満たす写像 $t \mapsto \Gamma(t)$ を亀裂の**準静的発展**と呼ぶ. しかし, 亀裂集合を変数に持つ FME に対しては適用可能な理論が少なく, 解析が難しい. 本研究のアイデアは, 亀裂集合をあるパラメータ関数に置き換えることでその特異性を緩和した正則化汎関数, いわゆる Ambrosio-Tortorelli エネルギー (以下 ATE) に基づいている. ここで用いられるパラメータ関数は 0 と 1 の間の連続的な値を取りながら, 損傷のない点で値 1 を取り, 外力による損傷を受けることで値が減少し, 亀裂が生じている点で 0 を返すような関数である. これを相場 (phase field) と呼ぶ. ここで, 上で述べた 3 つの性質のうち不可逆性の条件は相場の時間非増加性に置き換わることに注意する. 一般に, 汎関数を最小にするデータ (関数) を見つける問題はある種の偏微分方程式を解くことに帰着されることがあり, そのような方程式をその汎関数に対する Euler-Lagrange 方程式と呼ぶ (以下 EL eq. と書く). ATE, あるいはそれに準ずるエネルギー汎関数に対して上述のような不可逆的制約条件付き最小化問題を考えると, 対応する EL eq. に含まれる消散ポテンシャルにはその制約条件により退化性 (非強圧性) と特異性 (非有界性) が現れる. これは破壊現象の不可逆性を記述するための重要な要素であるが, 他方, 数学的には解析を難しくする要因でもある. ここで現れる方程式を**準静的発展方程式**と呼ぶことにすると, 筆者はこの準静的発展方程式に対しその時間大域的な可解性を証明し, またその解が時刻無限大で定常解に収束することを示した. [1] では, いわゆる Dirichlet エネルギーの不可逆的制約条件付き最小化問題に対する EL eq. が考察された. 証明の方法は時間離散化法に基づく. すなわち楕円型の (時間に依存しない) 方程式の情報から放物型の (時間に依存して発展する) 方程式の解のアプリオリ評価を導き, その過程で消散ポテンシャルの退化性と特異性による困難点を解消し, 準静的発展方程式の解の存在 (および解の一意性) を証明した. さらに解の時間無限大における極限が定常問題の解として特徴付けられることが証明された. また [2] では, 非二次形式であって劣微分が Lipschitz 連続にさえならないような, より一般の汎関数が考察されている. ここで, 方程式がより強い非線形性を持つことにより特に解の時間微分のアプリオリ評価の導出がとりわけ困難となることに注意する. [2] ではより精密な評価を導出し, 時間大域解の存在やその定常解への収束が議論された.

参考文献

[1] G. Akagi and K. Sato, Evolution equations with complete irreversibility and energy conservation, J. Math. Anal. Appl. **527** (2023), no. 1.

[2] K. Sato, Quasistatic evolution equations with irreversibility arising from fracture mechanics, arXiv:2310.20507.