

研究概要：数論的力学系における高さとゼータ関数の研究

数学専攻 博士 3 年 竹平航平

私の研究を一言で述べるならば、「離散力学系の中に、整数論的な問題を見出し、それを解く」となる。

離散力学系とは、集合 X と、写像 $f: X \rightarrow X$ に対し、点 $x \in X$ をとるごとに、 f に繰り返し代入して定まる点列 $x, f(x), f^2(x) = f(f(x)), \dots$ の振る舞いを研究する分野である。一方、整数論とは文字通り整数や、それから派生する数の体系の性質を調べる分野である。近年、これらの分野の融合領域に属する研究が活発になっており、そのような分野を数論的力学系と呼ぶ。私は、この数論的力学系の分野において、「高さ」と「ゼータ関数」をキーワードに、次の二つの研究を行っている。

1 力学系の高さゼータ関数の研究

高さとは、整数論において、数の「(整数論的な) 複雑さ」を測定する指標であり、有理数 $a/b \in \mathbb{Q}$ に対する $H(a/b) = \max\{|a|, |b|\}$ を任意の代数的数に一般化したものである。高さに関する重要な問題として、多様体の有理点分布問題がある。これは代数多様体、つまり多項式で定義される図形に対し、その K 有理点、つまり座標がすべてある体 K の元である点の個数を考える問題である。個数 $N(X, H, B) = \#\{x \in X(K): H(x) \leq B\}$ を考え、 $B \rightarrow \infty$ の挙動に興味を持たれている。一方で、高さ関数には、その力学系類似 $\hat{H}_{K,f}$ が知られており、**力学的標準高さ**と呼ばれている。上記の問題の「力学系版」として、力学的標準高さが B 以下である点の個数 $N(K, \hat{H}_{K,f}, B) = \#\{x \in K: \hat{H}_{K,f}(x) \leq B\}$ を考えたらどうなるか、という問題が自然に浮かび上がる。この種の問題に対しては、**高さゼータ関数**を考えることが有効な手段である。高さゼータ関数とは、この場合には、 $Z_K(f, s) = \sum_{x \in K} \hat{H}_{K,f}(x)^{-s}$ と定義される複素関数であり、この関数の極における留数などから、 $N(K, \hat{H}_{K,f}, B)$ の挙動に関する情報を取得できると期待できる。力学系の高さゼータ関数 $Z_K(f, s)$ に対し、初めて詳しい解析を行ったのが Hsia であり、彼は K が有限体上の曲線の関数体であり、 f が特定の条件を満たす場合に、ゼータ関数の解析接続および $N(K, \hat{H}_{K,f}, B)$ の漸近公式を与えた。一方、彼の研究では、ゼータ関数の非自明な明示計算の例は与えられておらず、また $N(K, \hat{H}_{K,f}, B)$ の漸近公式には誤りがある。そこで、私は論文 [3] において、特殊な場合にゼータ関数 $Z_K(f, s)$ の明示公式を与えた。これは、力学系の高さゼータ関数の非自明な明示計算としては初めてのものである。また、ゼータ関数から漸近挙動を導く議論に関しても、Hsia による先行研究の誤りを回避できる理論を整備し、これによって、 $Z_K(f, s)$ の極における Laurent 係数から $N(K, \hat{H}_{K,f}, B)$ を有界誤差を除いて決定できるようになった。

2 多項式力学系の放物パラメータの研究

本研究の一部は、小泉淳之介さん (理化学研究所)、村上友哉さん (九州大学)、佐野薫さん (NTT) との共同研究に基づく。

パラメータ c を持つ多項式 $f_c(z) \in \mathbb{C}[z]$ を考える。複素数 c が **放物パラメータ**であるとは、ある整数 $m, k \in \mathbb{Z}_{>0}$ と $x \in \mathbb{C}$ が存在し、方程式 $f_c^m(x) = x, (f_c^m)'(x)^k = 1$ を満たすことをいう。放物パラメータは、力学系の観点からは、**分岐現象**と関連するため重要である。 $f_c^m(x) = x$ を満たす点 x は周期 m の周期点と呼ばれるが、パラメータ c の変化に伴い、ある周期点が別の周期を持つ周期点に分裂・結合する場合がある。この現象を分岐現象といい、分岐現象は放物パラメータで発生する。また、 $f_c(z) = z^2 + c$ の場合、放物パラメータは **Mandelbrot 集合**の結節点、つまり「くびれている点」になっている (右図)。一方で、放物パラメータは代数的に定義され、数論的な研究も可能である。先行研究と、行った研究について紹介する。まず、定義多項式に関する研究を紹介する。Morton-Vivaldi は、ある多項式 $\Delta_{n,m}(c)$ であって、 c が放物パラメータであることと、 $\Delta_{n,m}(c) = 0$ が成立することが同値であるようなものを構成した。さらに彼らは、 $f_c(z) = z^2 + c$ の場合に $\Delta_{k,1}, \Delta_{2k,2}$ が $\mathbb{Q}$ 上既約であることを証明した。論文 [1] において、我々は $\Delta_{3k,3}$ が既約であることを示した。次に、放物パラメータの整数性に関する結果を紹介する。Milnor は c が $z^d + c$ の放物パラメータならば $d^d c^{d-1}$ が代数的整数になることを証明した。Hugin は Milnor の定理に、multiplier 多項式を用いた別証明を与えた。[2] において、我々は Huguin の議論を Newton polygon を用いて洗練させ、 $z^{d+1} + cz$ に対しても同様の整数性が成り立つことを明らかにした。また、私は Milnor の議論を拡張し、定数項をパラメータとみなす monic 多項式については常に整数性があることを明らかにした。

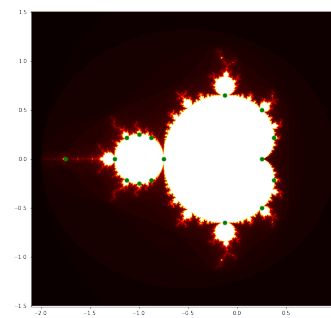


図 1 Mandelbrot 集合

参考文献

- [1] J. Koizumi, Y. Murakami, K. Sano, and K. Takehira, *Irreducibility of polynomials defining parabolic parameters of period 3*. preprint (2024), arXiv:2408.04850.
- [2] Y. Murakami, K. Sano, and K. Takehira, *Arithmetic properties of multiplier polynomials for certain polynomial maps*. preprint (2024), arXiv:2403.17315.
- [3] K. Takehira, *On the number of points with bounded dynamical canonical height*, Journal of Number Theory **271** (2025), 216-245.