

数学クイズ2024 答え

担当: 石橋典

東北大学大学院理学研究科数学専攻

- 問題 1 (★). 1. $\langle r_1 : 0 \rangle \cdot \langle r_2 : 0 \rangle = \langle r_1 r_2 : 0 \rangle$. ($r_1 \cdot r_2 = r_1 r_2$ と同じ)
- $\langle r_1 : \pi \rangle \cdot \langle r_2 : \pi \rangle = \langle r_1 r_2 : 0 \rangle$. ($((-r_1) \cdot (-r_2) = r_1 r_2$: マイナス $\times$ マイナス = プラスの説明.)
2. $i^2 = \langle 1 : \pi \rangle = -1$, $i^3 = \langle 1 : 3\pi/2 \rangle = -i$, $i^4 = 1$. (平面上を 90° ずつ回転している.)

問題 2 (★★). 三角関数の加法定理を使うと,

$$(r \cos \theta + ir \sin \theta)(r' \cos \theta' + ir' \sin \theta') = rr' \cos(\theta + \theta') + irr' \sin(\theta + \theta')$$

となることがわかる. 平面上の点 $p = \langle r : \theta \rangle$ と複素数 $z = r \cos \theta + ir \sin \theta$ を対応づけることで, 新しい掛け算 (1.3) と複素数の掛け算 (1.2) が同じ計算をしていることがわかる.

問題 3 (★★). 省略. i と j を入れ替えないように注意しながら展開するだけ.

問題 4 (★★★). 乗積表

	1	i	j
1	1	i	j
i	i	*	*
j	j	*	*

を埋めて, 結合則 $(ab)c = a(bc)$ をみたすものが作ればよい (代数学の用語では, 単位的結合代数). 割り算 (逆元) の存在を仮定しないことにすると次の 5 つの例が知られており, どれも本質的に異なる (代数学の用語では, 互いに代数同型でない):

- $i^2 = j^2 = ij = ji = 0$. (最も自明な例. 割り算 (逆元) の存在を仮定しないので, $ij = 0$ だからといって $i = 0$ または $j = 0$ とはならないことに注意. 同様に, $i^2 = ij$ だからといって $i = j$ とはならない. こんな感じの変な数体系が続きます)
- $i^2 = 1, j^2 = 0, ij = j = -ji$.
- $i^2 = j, j^2 = 0, ij = ji = 0$.
- $i^2 = i, j^2 = 0, ij = ji = 0$.
- $i^2 = i, j^2 = j, ij = ji = 0$.

	1	i	j		1	i	j		1	i	j		1	i	j		1	i	j
1	1	i	j	1	1	i	j	1	1	i	j	1	1	i	j	1	1	i	j
i	i	0	0	i	i	1	j	i	i	j	0	i	i	i	0	i	i	i	0
j	j	0	0	j	j	$-j$	0	j	j	0	0	j	j	0	0	j	j	0	j

割り算をもつ“健全”な数体系 (代数学の用語では, 加除代数) は 3 次元では存在しないことが証明されています.

問題 5 (★★). $i^2 = -1$, $ij + ji = 0$ などを使うと,

$$q \cdot q^{-1} = \frac{(t + xi + yj + zk)(t - xi - yj - zk)}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2} = 1.$$

同様に $q^{-1} \cdot q = 1$ が示せる.

問題 6 (★★). $\vec{v} = [x \ y \ z]$, $\vec{v'} = [x' \ y' \ z']$ とするとき,

$$\begin{aligned} (xi + yj + zk)(x'i + y'j + z'k) &= -(xx' + yy' + zz') + (yz' - y'z)i + (zx' - z'x)j + (xy' - x'y)k \\ &= -(\vec{v} \cdot \vec{v'}) + (\vec{v} \times \vec{v'})_x i + (\vec{v} \times \vec{v'})_y j + (\vec{v} \times \vec{v'})_z k. \end{aligned}$$

ここで $(\vec{v} \times \vec{v'})_x$, $(\vec{v} \times \vec{v'})_y$, $(\vec{v} \times \vec{v'})_z$ はそれぞれ外積 $\vec{v} \times \vec{v'}$ の x, y, z -成分を表す.

問題 7 (★★★). $c = \cos \frac{\theta}{2}$, $s = \sin \frac{\theta}{2}$ と略記する.

$$\begin{aligned} q' &= (c + si)(xi + yj + zk)(c - si) \\ &= (-sx + cx i + (cy - sz)j + (cz + sy)k)(c - si) \\ &= (s^2x + c^2x)i + ((c^2 - s^2)y - 2scz)j + (2scy + (c^2 - s^2)z)k \\ &= xi + (y \cos \theta - z \sin \theta)j + (y \sin \theta + z \cos \theta)k. \end{aligned}$$

対応するベクトルは

$$\vec{v}_{q'} = \begin{bmatrix} x \\ y \cos \theta - z \sin \theta \\ y \sin \theta + z \cos \theta \end{bmatrix}$$

となる. 簡単のため $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ として $\theta = 0, \pi/4, \pi/2$ を代入すると, 対応するベクトルはそれぞれ

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となって確かに yz -平面内を回転している. (一般に $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \cos \theta - z \sin \theta \\ y \sin \theta + z \cos \theta \end{pmatrix}$ は yz -平面内の角度 θ の回転を表す 1 次変換と呼ばれます.)

問題 8 (★).

$$\begin{aligned} (e_1 e_2) e_3 &= e_3 \cdot e_3 = -1, \\ e_1 (e_2 e_3) &= e_1 \cdot e_1 = -1. \end{aligned}$$

この場合は一致している.

$$\begin{aligned} (e_1 e_2) e_5 &= e_3 \cdot e_5 = e_6, \\ e_1 (e_2 e_5) &= e_1 \cdot e_7 = -e_6. \end{aligned}$$

この場合は一致しないので, 一般に結合法則 $(ab)c = a(bc)$ が成り立たない世界になっている.

問題 9 (**). 1. 虚数単位同士の掛け算ルールと分配法則より

$$a = (a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) + (a_4 + a_5 e_1 - a_6 e_2 + a_7 e_3) e_4$$

と書けるので, $q_0 = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$, $q_1 = a_4 + a_5 e_1 - a_6 e_2 + a_7 e_3$ とすればよい.

2. 虚数単位同士の掛け算ルールと分配法則より

$$a = (a_0 + a_4 e_4) + (a_1 - a_5 e_4) e_1 + (a_2 + a_6 e_4) e_2 + (a_3 - a_7 e_4) e_3$$

と書けるので, $z_0 = a_0 + a_4 e_4$, $z_1 = a_1 - a_5 e_4$, $z_2 = a_2 + a_6 e_4$, $z_3 = a_3 - a_7 e_4$ とすればよい.