数学クイズ2024

パパは掛け算ができない ～高次元の “数” とその演算～

$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

担当: 石橋典

東北大学大学院理学研究科数学専攻

皆さんは,「ものを数える」という素朴な感覚から出発して自然数, 整数, 有理数, さらには実数と数の世界を拡張し, 彼らと共に数学世界を旅してきたことと思います. ご存知の通り実数は数直線という形で一列に並ぶ, いわば **1 次元的な数**です. 高校のカリキュラムでは “2 乗して -1 になる” 不思議な数 $\boldsymbol{i}$ を仲間に加え, 複素数 $x + y\boldsymbol{i}$ を学ぶことでしょう. 彼らは 2 つのパラメータ (x, y) で表され, 平面上に配置することができる **2 次元的な数**といえます.

さて, 数々の偉大な業績を残した 19 世紀の数学者ハミルトン (William Rowan Hamilton) は, あるとき「3 次元的な数の体系はないか？」という問いを追求していました. しかし彼の探究は困難を極めたようです. 研究に行き詰まっていたある時期, 彼が家族と暮らす自宅では毎朝朝食に降りていくなり, 2 人の息子から

ねぇパパ、三元数の掛け算はできた ??

と聞かれ, 彼は悲しそうに首を振りながら

いいや, パパは足し算と引き算しか出来ないんだ……

と答えるしかなかったそうな. その後, 彼は 4 次元的な数の体系である**四元数**を発見します. このアイデアを思い付いたときハミルトンは外出中だったため、逆る情熱を抑えきれず通りすがりの橋の石積みにポケットナイフでアイデアを彫り込んだという逸話が残っています [1]. ハミルトンの苦悩と発見の喜びが詰まった逸話ですね.

今回は 2 次元の数の体系である複素数から出発し, 3 次元でのハミルトンの苦悩を一部追体験しながら, よくできた 4 次元の数体系である**四元数**の世界にも足を踏み入れてみましょう. 最後はちょっと飛んで, 現代数学で暗躍する 8 次元の数体系 “**八元数**” も一部紹介します.

複素数を知らなくても大丈夫！一応習ったけど苦手... という人も親しみが持てるようになるかも？

難易度の目安を星の数で示します (全部解く必要はないので, 興味がある問題に挑戦してみよう！).

⋆ : 肩慣らし.

⋆⋆ : 紙に書いてちょっと計算してみよう.

⋆⋆⋆ : 本格的な問題.

1　二元数 (複素数)

「数」といえば, 皆さん何を思い浮かべるでしょうか？最も素朴なものは自然数 $0, 1, 2, \ldots$ ですが, 負の数 -1 や有理数 $2/3$, 円周率 π も数の仲間に入れてあげましょう. 「数」と呼ぶからには, それら

の間に「計算ルール」があってほしい．つまり足し算 $a+b$ と掛け算 $a\cdot b$ です.[1] 皆さんが実数について当たり前に考えている足し算と掛け算は, 以下の当たり前の性質をみたします:

結合法則: $(ab)c = a(bc)$

交換法則: $ab = ba$

分配法則: $(a+b)c = ac+bc$, $a(b+c) = ab+ac$

逆にいうと, このような性質をもった演算が定まっている対象であれば, 一見そうは見えなくとも,「数」のようなものと考えてよいのでは？と柔らかく考えるのが数学です.

複素数とは, $\boldsymbol{i}^2 = -1$ をみたす不思議な数 $\boldsymbol{i}$ を仲間に加え, $x+y\boldsymbol{i}$ という形の対象たちのなす数体系です．足し算と掛け算を次のように定義します:

$$(x+y\boldsymbol{i}) + (x'+y'\boldsymbol{i}) = (x+x') + (y+y')\boldsymbol{i}, \tag{1.1}$$

$$(x+y\boldsymbol{i})(x'+y'\boldsymbol{i}) = (xx'-yy') + (xy'+x'y)\boldsymbol{i}. \tag{1.2}$$

2 つ目は一見複雑ですが, $(x+y\boldsymbol{i})(x'+y'\boldsymbol{i})$ を素直に展開し, $\boldsymbol{i}^2=-1$ を使うと (1.2) の右辺になります．しかし, そうは言っても「2 乗して -1 になる数なんてあるの？ (変なものを仲間にいれて大丈夫か？)」という感覚はもっともです．本稿では複素数を “2 次元的な数 (**二元数**)” として見直してみましょう.

複素数 $x+y\boldsymbol{i}$ を, 2 次元座標平面上の点 (x,y) に対応させましょう．掛け算ルール (1.2) は一旦忘れて, 平面上の点同士の「掛け算」を定義できないか？という視点で考えてみます.

パパ！平面上の点同士の掛け算ってできる？

例えば素朴に

$$(x,y)\cdot(x',y') \overset{?}{=} (xx', yy')$$

が思いつきます．安直に成分同士を掛け算するわけです．しかしこれでは第 1 成分と第 2 成分は完全に独立であって, 単に実数を 2 つ横に並べているに過ぎません.

これも正しい答ではあるのですが [息子たちはつまらなさそうにこちらを見ている...], もう少し幾何学的にセンスの良い定義を考えましょう．2 次元平面の点 p を指定するには (x,y)-座標を使うほかに, 原点からの距離 r と**偏角** θ を使う方法があります (図 1).

組 (r,θ) で表される 2 次元平面上の点を $p = \langle r:\theta\rangle$ と書くことにしましょう．掛け算の定義として, 次を提案します:

$$\langle r:\theta\rangle\cdot\langle r':\theta'\rangle := \langle rr' : \theta+\theta'\rangle. \tag{1.3}$$

半径はそれぞれの積, 偏角はそれぞれの和です．感覚を掴むために, いくつか計算してみましょう (図を描きながら):

問題 1 ($\star$).
1. 積 $\langle r_1:0\rangle\cdot\langle r_2:0\rangle$ と $\langle r_1:\pi\rangle\cdot\langle r_2:\pi\rangle$ を計算してみよう．$\theta=0,\pi$ に対応する点をそれぞれ正の実数, 負の実数と呼ぶことにし, $r=\langle r:0\rangle$, $-r=\langle r:\pi\rangle$ と書きます.
2. $\boldsymbol{i} := \langle 1:\pi/2\rangle$ と定義するとき, $\boldsymbol{i}^2, \boldsymbol{i}^3, \boldsymbol{i}^4, \dots$ を計算してみよう.
3. 正整数 n に対して $\omega := \langle 1 : 2\pi/n\rangle$ と定義するとき, いつ $\omega^k = \overbrace{\omega\dots\omega}^{k} = 1$ となるか？

それなりに自然な計算ルールになっていると思えたでしょうか？そうだとして, しかしこの掛け算は結合法則, 交換法則, 分配法則などのまともな性質を持っているのでしょうか.

[1]本稿では掛け算の記号に $\cdot$ を使いますが, 省略して ab と書くこともあります.

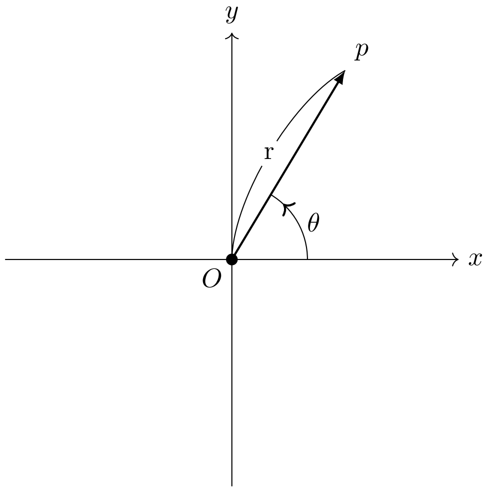


図 1: 原点からの距離 r と偏角 θ による点 $p = \langle r : \theta \rangle$ の指定.

結論としてはこれらの法則がちゃんと成り立ちますが (結合法則, 交換法則は簡単にわかる), 分配法則をこの定義から直接チェックするのはやや面倒です. 実は, ここで提案した掛け算ルールは冒頭の複素数の掛け算ルール (1.2) と同じになります:

問題 2 ($\star\star$)**.** 極座標で $p = \langle r : \theta \rangle$ と表される点は, (x, y)-座標では $p = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ と表せます. この事実を用いて,

- 複素数の掛け算 $(r\cos\theta + \boldsymbol{i}r\sin\theta) \cdot (r'\cos\theta' + \boldsymbol{i}r'\sin\theta')$
- 新しい掛け算 $\langle r : \theta \rangle \cdot \langle r' : \theta' \rangle$

を比較してみよう.

まとめると, 一見不思議な複素数の積 (1.2) は角度と偏角にもとづいた (1.3) に置き換えてもよいことがわかりました. この観点からは, 虚数単位 $\boldsymbol{i}$ とは点 $\langle 1 : \pi/2 \rangle$ のことです. また, $\boldsymbol{i} = \langle 1 : \pi/2 \rangle$ を他の複素数 $z = \langle r : \theta \rangle$ に掛け算すると

$$\boldsymbol{i} \cdot z = \langle r : \theta + \pi/2 \rangle$$

より, $90°$ 回転の効果を持っていることがわかります. 特に $\boldsymbol{i}^2$ は $180°$ 回転, つまり (-1) 倍だから $\boldsymbol{i}^2 = -1$ が成り立ちます. また分配法則は (1.2) の方をもとに計算すると, 確かに成り立っていることが簡単に確認できます.

2 三元数は定義できるか？

一見謎めいた複素数の掛け算 (特に $\boldsymbol{i}^2 = -1$) は, 2 次元平面上の点に対する角度と偏角にもとづいた幾何学的に自然な計算ルール (1.3) で理解してもよいことがわかりました. では同じようにして, n 次元座標平面 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ にも掛け算が定義できるのではないでしょうか？

よーし, パパ n 次元の場合にもやっちゃうぞ！

ここからはハミルトンの思考を辿り, 3 次元の場合に考えてみましょう. (数学者になったつもりで！) 分からなくなったら最後の結論を読んで, 次の節に進んでも大丈夫です.

3 次元座標空間内の点は, (x, y, z) という 3 つの実数の組で表されます. この中の xy-平面を, 先ほど調べた複素数の平面だと解釈します. 特に, x 軸と y 軸がそれぞれ 1 と $\boldsymbol{i}$ に対応する方向です.

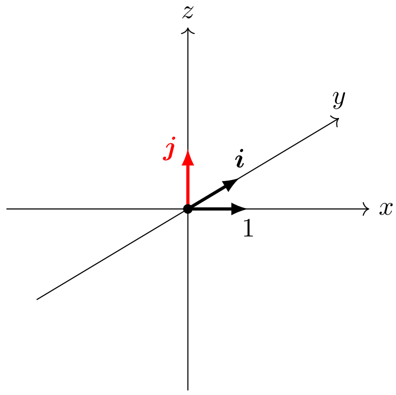


図 2: 3 次元座標空間と, 第 3 の方向に対応する数 $\boldsymbol{j}$.

では同じようにして, z 軸方向に新しい $\boldsymbol{j}$ という数であって $\boldsymbol{j}^2 = -1$ をみたすものを用意してはどうでしょうか？ つまり, $x + y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j}$ と表される「数」を考え (3 次元の数なので "三元数" と呼ぶことにいたしましょう), $\boldsymbol{i}^2 = -1$, $\boldsymbol{j}^2 = -1$ $(\boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j})$ というルールをみたすような掛け算を考えてみます. $\boldsymbol{j}$ の掛け算は y 軸まわりの 90° 回転に対応しそうです. 足し算は素朴に

$$(x + y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j}) + (x' + y'\boldsymbol{i} + z'\boldsymbol{j}) = (x + x') + (y + y')\boldsymbol{i} + (z + z')\boldsymbol{j}$$

と定めることにします. 新しい演算を決めるには, なにか指導原理 (成り立ってほしい性質) を先に決める必要があります. とりあえず, まともに計算する上で分配法則は欲しいので仮定しましょう. さて $\boldsymbol{i}$ と $\boldsymbol{j}$ は今のところ完全に独立なので, まずこれらの間の関係を決める必要があります.

(1) とりあえず, $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{ji}$ として計算をしてみます. 三元数 $a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j}$ の自乗を, 分配法則を使って計算します:

$$(a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j})^2 = (a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j})(a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j}) = (a^2 - b^2 - c^2) + 2ab\boldsymbol{i} + 2ac\boldsymbol{j} + 2bc\boldsymbol{ij}$$

すると $\boldsymbol{ij}$ の項が残ってしまいました. つまり三元数の世界をはみ出してしまったので, これでは閉じた数体系にならないということです. $\boldsymbol{ij} = 0$ とするのも奇妙です.

(2) それでは思い切って $\boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji}$ としてはどうでしょうか？交換法則 $ab = ba$ を捨てることになるので, <u>不用意に $\boldsymbol{i}$ と $\boldsymbol{j}$ の並び順を入れ替えないよう注意しながら</u>分配法則を使って計算します:

$$\begin{aligned}(a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j})^2 &= (a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j})(a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j}) \\ &= (a^2 - b^2 - c^2) + 2ab\boldsymbol{i} + 2ac\boldsymbol{j} + bc\boldsymbol{ij} + bc\boldsymbol{ji} \\ &= (a^2 - b^2 - c^2) + 2ab\boldsymbol{i} + 2ac\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

最後に $\boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji}$ を使いました. とりあえずこの場合はうまく行きましたね.

問題 3 $(\star\star)$**.** 上の計算を参考にしつつ, 分配法則と $\boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji}$ を用いて, 公式

$$(a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j})(x + y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j}) = (ax - by - cz) + (ay + bx)\boldsymbol{i} + (az + cx)\boldsymbol{j} + (bz - cy)\boldsymbol{ij}$$

を証明せよ.

残念ながら, また $\boldsymbol{ij}$ の項が残ってしまいました. 一方で, 三元数 $\alpha = x + y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j}$ の絶対値を

$|\alpha| := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ と定義するとき, 法則

$$|\alpha \cdot \alpha'| = |\alpha| \cdot |\alpha'| \tag{2.1}$$

は成り立っていることがわかります. ハミルトン自身は分配法則と, この「**絶対値の法則**」を指導原理として三元数の数体系を追求したようです. 実はこれらの事実から分かることは, $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{ij}$ という第 4 番目の数の存在さえ認めさえすれば, 分配法則および絶対値の法則をみたす数体系は作れるということなのです. 以下は [2] からの引用です:

> このことから Hamilton はどうしても第 4 番目の元 $\boldsymbol{k}$ があることを認めなければならなかった。すなわち、一般の ”三元数” の積を考えれば ”三元数” の中にはなかった第 4 番目の元 $\boldsymbol{k}$ が必然的に出てくるのだから、”三元数” の積は ”三元数” としては表せない (数学的にいえば閉じていない)。したがって、”三元数” を ”三元数” の範囲で合理的に定義することはできない。

本節の結論は以下の通りです.

結論: 良い性質をもった “三元数” の数体系は, うまく定義できそうにない.

しかしながら, 数学において何かが「不可能だ」という事実はしばしば, むしろ大変興味深い研究対象となります (4 節).

問題 4 ($\star\star\star$)**.** 上の考察では三元数がうまく定義できませんでしたが, 他の方法はないのでしょうか？ (あとで触れるように, とある条件下で「三元数の数体系は定義できない」ことが証明できるのですが, 何らかの条件を諦めることでそれなりの数体系ができる可能性はあります.)

3 四元数

前節での考察から, 第 4 番目の数 $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji}$ を導入すれば, 4 次元座標空間の点 (t,x,y,z) に対応する「数」 $q = t + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ にうまく足し算と掛け算を考えることができそうです.[2] これがハミルトンが強烈な喜びと共に発見し, 今日では四元数と呼ばれている数体系です. 複素数の場合にならい, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ をそれぞれ**虚数単位**と呼ぶことにしましょう (虚数が 3 つある！).

計算ルールは以下の通りです:

足し算: $(t + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) + (t' + x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k}) = (t+t') + (x+x')\boldsymbol{i} + (y+y')\boldsymbol{j} + (z+z')\boldsymbol{k}$.

虚数単位の掛け算: $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1$, $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji}$, $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj}$, $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik}$.

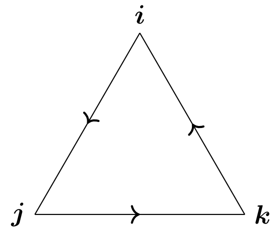
一般の掛け算: 分配法則, 結合法則および上のルールを組み合わせて計算する.

例えば

$$\begin{aligned}
(3+2\boldsymbol{i})(\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}) &= 3\boldsymbol{j} + 12\boldsymbol{k} + 2\boldsymbol{ij} + 8\boldsymbol{ik} && \text{(分配法則)} \\
&= 3\boldsymbol{j} + 12\boldsymbol{k} + 2\boldsymbol{k} - 8\boldsymbol{j} && \text{(虚数単位の掛け算)} \\
&= -5\boldsymbol{j} + 14\boldsymbol{k} && \text{(足し算)}
\end{aligned}$$

[2] 4 次元空間というのは目に見えませんが, 数学的には 4 つの数の組 (t,x,y,z) 全体のなす集合と思っておけば OK です. ここで思わせぶりな記号 t を使いましたが, この方向が 4 次元時空の “時間” のような方向に相当するかどうかはここでは気にしません (そう解釈してもいいし, しなくてもいい).

のように計算します. 虚数単位同士の掛け算を覚えるには次のようなイメージが役立ちます:



矢印の向きをたどって 2 つの虚数単位を掛けると, 3 つ目の虚数単位になります: $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{jk} = \boldsymbol{i}$ など. 矢印と逆向きに掛けた場合にはマイナスがつきます. また, 四元数は「数」と呼ぶにふさわしく, 「割り算」ができます:

割り算 (逆数): 四元数 q に対し, $q^{-1} = \dfrac{\overline{q}}{|q|^2}$ とすると $q \cdot q^{-1} = q^{-1} \cdot q = 1$ をみたす.

ここで記号の意味は以下の通りです:

共役: 四元数 $q = t + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ に対し, $\overline{q} = t - x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$ と定める.

絶対値: $|q| = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}$.

問題 5 ($\star\star$)**.** $q \cdot q^{-1} = q^{-1} \cdot q = 1$ を示してみよう (一般に $ab \neq ba$ に注意！).

ちなみに四元数は $q = t + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = (t + x\boldsymbol{i}) + (y + z\boldsymbol{i})\boldsymbol{j}$ と書くこともできるので, 2 つの複素数 $t + x\boldsymbol{i}$, $y + z\boldsymbol{i}$ から成っていると考えることもできます.

3.1 四元数と 3 次元ベクトルの内積, 外積

“三元数” と 3 次元ベクトルを対応づけることには失敗しましたが, $x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ の形の四元数を 3 次元ベクトル $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ と対応づけることにしましょう. 3 次元ベクトルの内積, 外積は以下で定義されます:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} := xx' + yy' + zz', \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} yz' - y'z \\ zx' - xz' \\ xy' - x'y \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

問題 6 ($\star\star$)**.** 四元数の積 $(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})(x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k})$ を計算して, ベクトルの内積, 外積 (3.1) と比べてみよう.

このように, 四元数の積を使ってベクトルに対する計算を書くことができます. 0 でない四元数 q には必ず逆数 q^{-1} が存在するので, この意味で「割り算のできるベクトル」と呼ばれることもあります.

3.2 四元数と 3 次元回転

3 次元空間内での任意の回転を, 次のように四元数の積を使って表現することができます. 四元数のこの性質は幅広い応用があり, 例えば宇宙機の 3 次元的な制御やコンピュータグラフィクス (CG) などの工学方面でも活躍しているようです.

四元数 $q = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ を 3 次元ベクトル $\vec{v}_q = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ と対応づけます (以下, スペースの都合で横ベクトルにします). 3 次元ベクトル $\vec{n} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}$ ($n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$) および角度 θ で指定される次の四元数 α を考えましょう:

$$\alpha_{n,\theta} = \cos\frac{\theta}{2} + n\sin\frac{\theta}{2}, \quad n = n_x\boldsymbol{i} + n_y\boldsymbol{j} + n_z\boldsymbol{k}.$$

定理

四元数 $q = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ に対して, 積

$$q' := \alpha_{n,\theta} \cdot q \cdot \overline{\alpha_{n,\theta}}$$

は再び純虚数 ($q' = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k}$ の形) となり, 対応する 3 次元ベクトルの変換 $\vec{v}_q \mapsto \vec{v}_{q'}$ は 3 次元単位ベクトル $\vec{n}$ を回転軸とする角度 θ の回転になっている (図 3).

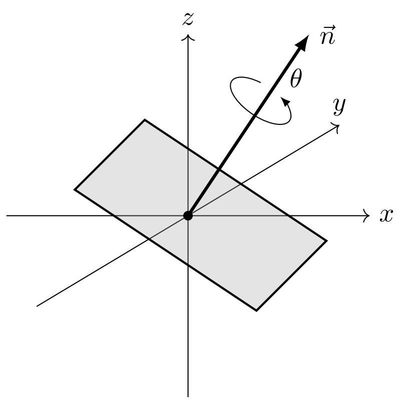


図 3: 3 次元空間内の回転. $\vec{n}$: 回転軸, θ: 回転角

問題 7 ($\star\star\star$)**.** $n = \boldsymbol{i}$ とするとき,

$$q' = x\boldsymbol{i} + (y\cos\theta - z\sin\theta)\boldsymbol{j} + (y\sin\theta + z\cos\theta)\boldsymbol{k}$$

となることを確認してみましょう. ただし, 2 倍角の公式 $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$, $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ を使います. また, $\theta = 0, \pi/4, \pi/2$ などを代入して回転を感じよう.

4 八元数

四元数の世界はいかがだったでしょうか？不思議な「数」の体系であるとともに, 3 次元ベクトルの回転と密接に結びついています. ハミルトン自身も 3 次元の幾何学への応用を見据えて三元数を追求し, 結果として四元数の発見に至ったようです.

この節ではもっと刺激が欲しい方のために, 8 次元空間上の数体系である**八元数**をちょっとだけ紹介します.[3]

[3]ちなみに八元数はプロの数学者の中でも扱ったことがある人は決して多くはないと思います (筆者も実はつい最近勉強したところです) ので, 計算ができるとちょっとした自慢になるかも？

八元数は 7 個の虚数単位 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_7$ を持ち, $x = x_0 + \sum_{i=1}^{7} x_i \boldsymbol{e}_i$ と表されます [3]. ここで $(x_0, x_1, \ldots, x_7)$ は 8 個の実数の組です. 四元数のときと同様に虚数単位たちは $\boldsymbol{e}_i^2 = -1$ $(i = 1, \ldots, 7)$, $\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j = -\boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_i$ $(i \neq j)$ をみたし, これらの間の掛け算ルールは次の不思議な図で表されます:

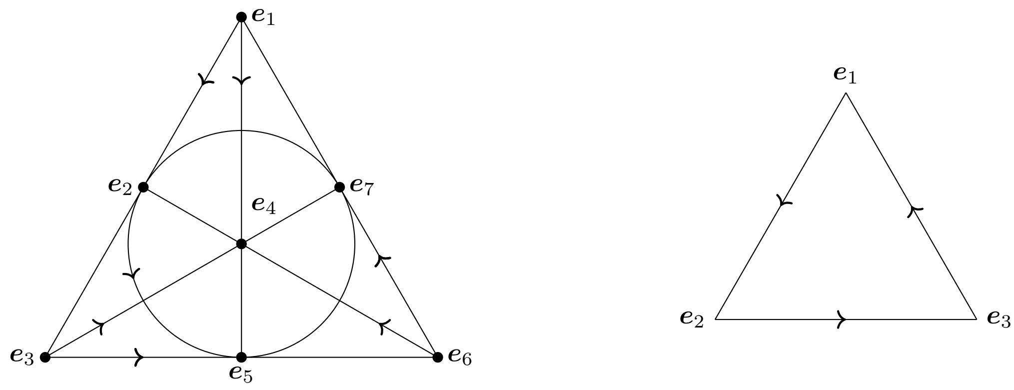


図 4: [左] 八元数の掛け算ルール. [右] 巡回部分の例.

図左において, 向きのついた直線に沿って 2 つの虚数単位を掛けると第 3 の虚数単位を得ます. また四元数の場合と同様, これら 3 者の積は巡回的になっているとします (図右). つまり例えば:

$$\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2,$$
$$\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{e}_7, \quad \boldsymbol{e}_4\boldsymbol{e}_7 = \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_7\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_4.$$

また, 円周上でも同様のルールが成り立っているとします: $\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_5 = \boldsymbol{e}_7$, $\boldsymbol{e}_5\boldsymbol{e}_7 = \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_7\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_5$. 一般の八元数同士の掛け算は, 分配法則を使って計算します. この世界では, 3 つ以上の掛け算に少し注意が必要です:

問題 8 ($\star$)**.** $(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)$, $(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_5$, $\boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_5)$ をそれぞれ計算してみよう.

八元数の世界では, 一般に結合法則 $(ab)c = a(bc)$ が成り立ちません. こうなるとちょっと計算が厳しい気もしますね. 一方で巡回ルールより, 例えば $t + x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$ の形の数同士の掛け算ルールは四元数 $t + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ のものと同じですから, この部分では結合法則が成り立っています. 次のように, 八元数は 2 つの四元数 $(8 = 4 + 4)$ あるいは 4 つの複素数 $(8 = 2 + 2 + 2 + 2)$ から成っているとも考えることができ, それぞれの部分に限れば結合法則が使えます.

問題 9 ($\star\star$)**.** $a = a_0 + a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 + a_4\boldsymbol{e}_4 + a_5\boldsymbol{e}_5 + a_6\boldsymbol{e}_6 + a_7\boldsymbol{e}_7$ を任意の八元数とします.

1. $a = q_0 + q_1\boldsymbol{e}_4$ という形に書けることを示してみよう. ここで q_0, q_1 はそれぞれ $t + x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$ という形の元 ("四元数") とします.
2. $a = z_0 + z_1\boldsymbol{e}_1 + z_2\boldsymbol{e}_2 + z_3\boldsymbol{e}_3$ という形に書けることを示してみよう. ここで z_0, z_1, z_2, z_3 はそれぞれ $x + y\boldsymbol{e}_4$ という形の元 ("複素数") とします.

四元数の場合と同様に, 共役 $\overline{x} = x_0 - \sum_{i=1}^{7} x_i \boldsymbol{e}_i$ および絶対値 $|x| = \sqrt{x\overline{x}} = \sqrt{x_0^2 + \sum_{i=1}^{7} x_i^2}$ を用いて逆数 $x^{-1} = \dfrac{\overline{x}}{|x|^2}$ が作れます. また, ハミルトンが重きを置いていた絶対値の法則 $|xy| = |x||y|$ も成り立ちます. これらの意味では, ある程度健全な数体系と言ってよいでしょう. 今までに登場した数体系の性質をまとめます:

	結合法則	交換法則	分配法則	逆数の存在	絶対値の法則
実数	○	○	○	○	○
複素数	○	○	○	○	○
四元数	○	×	○	○	○
八元数	×	×	○	○	○

四元数の掛け算が 3 次元ベクトルの回転を表していたように, 八元数の掛け算は 7 次元ベクトルの回転を表します. 少し専門的な話になりますが, 八元数の体系は例外型単純リー群 G_2 と呼ばれる神秘的な 7 次元対称性と密接に関わっています [3].

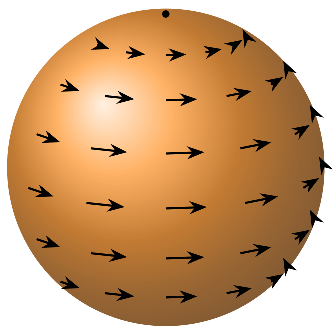


図 5: 2 次元球面上のベクトル場. 北極と南極に零点 (無風地帯) が存在する.

さて, これまで 1 次元 (実数), 2 次元 (複素数), 4 次元 (四元数), 8 次元 (八元数) で数体系を見てきましたが, 他の次元では存在しないのでしょうか?? (3 次元は無理そうでしたが). 実は, まともな数体系は 1,2,4,8 次元以外には

存在しない

ことが証明されています. しかも証明の鍵は**トポロジー**という, 現代数学における「柔らかい幾何学」でした (トポロジーについては 2023 年度の数学クイズもどうぞ). ハミルトンの挫折には深い理由があったのです. “まともな” 数体系の定義はここではしませんが, 分配法則と逆数が存在する数体系と思ってください. 例えば 3 次元空間にまともな掛け算が存在したとすると, とある方法で 2 次元単位球面の上に零点を持たないベクトル場が作れます. ベクトル場とは, 各地点で風向きのベクトルを表したような図をイメージしてください (図 5). これは, 球面上のベクトル場には常に零点 (無風地点) が存在するというトポロジーの定理と矛盾するのです (詳しくは [4, 定理 2.10]).

最後は難しい話をしましたが, 数体系の存在とトポロジーの関係は全くもって不思議なものです. トポロジーについては数学科 3 年生の専門科目「幾何学概論 B」で学習します (筆者が講義や演習を担当します). ぜひ一緒に勉強しましょう！

参考文献

[1] 堀源一郎, ハミルトンと四元数, 海鳴社 (2007).

[2] 矢野忠, 四元数の発見, 海鳴社 (2014).

[3] 横田一郎, 例外型単純リー群, 現代数学社 (2013).

[4] 枡田幹也, 代数的トポロジー, 朝倉書店 (2002).