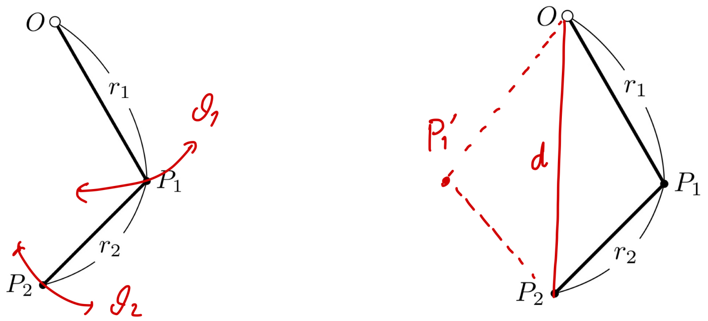
数学クイズ2025 答え

動きの「自由度」を数える

担当: 石橋典

東北大学大学院理学研究科数学専攻

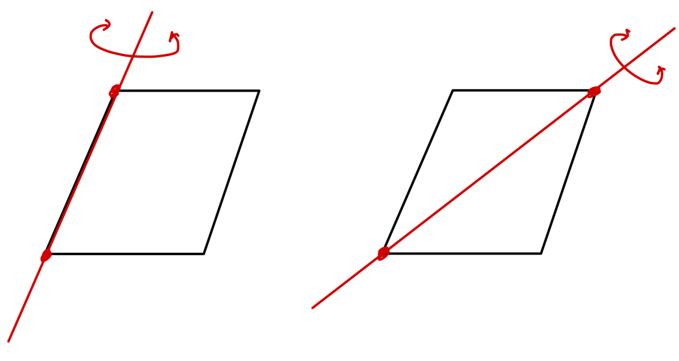
問題 1. 合計の自由度は 2. 図のように P_1 の角度パラメータ θ_1 と P_2 の角度パラメータ θ_2 という 2 つのパラメータで表される. 同様に考えて n 重振り子なら合計の自由度は n.



問題 2. P_2 が答え. P_1 を固定した場合, まだ P_2 が自由度 θ_2 を持つ. P_2 を固定した場合, P_1 は連続な動きの自由度を持たない (自由度は 0). 後者の場合について詳しくは: P_2 を止めると三角形 OP_1P_2 の三辺の長さが固定される. P_1 の取りうる配置は図の 2 点のみである. この 2 つの配置は連続な動きで移り合わないので, 自由度は 0.

発展. 3 次元空間内で考えた場合, P_2 を固定した上で P_1 には軸 OP_2 に関する回転の 1 自由度が残る.

問題 3. 3 点固定すればよい. 2 点留めた場合の状況は図の 2 通り. どちらもまだ回転の自由度が残っている. 3 点目を固定すればこの自由度は固定できる.

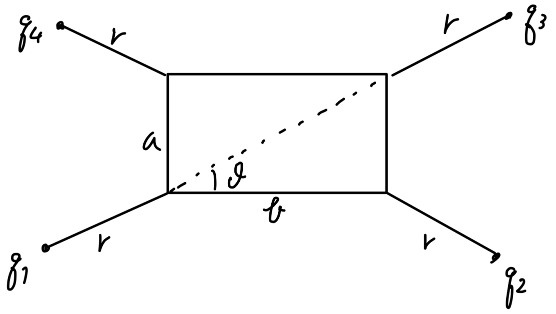


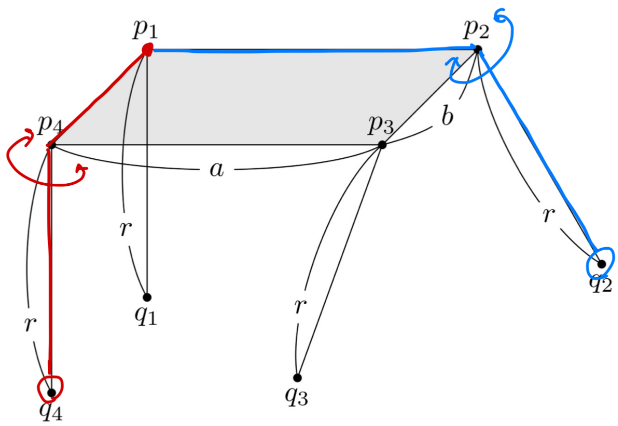
問題 4. (1) 図のように脚を平面上にピンと張った配置を考えると, 板は動かない. 具体的には

$$\begin{aligned} &q_1 = (0,0), \quad q_2 = (b + 2r\cos\theta, 0), \\ &q_3 = (b + 2r\cos\theta, a + 2r\sin\theta), \\ &q_4 = (0, a + 2r\sin\theta). \end{aligned}$$

ここで $\tan\theta = a/b$.

(2) 5 点でよい (!).[1] まず, 脚の 4 点 $q_1, \ldots, q_4$ を固定する. 次に p_1 を固定する. このとき, 図の赤部分の構造は 2 重振り子と同じである (“部分 2 重振り子” と呼ぼう). 問題 2 の発展から, p_4 の残りの動きは回転の 1 自由度のみである. 同様に, 青部分の部分 2 重振り子に着目すると, p_2 の残りの動きは回転の 1 自由度のみ. ここで, 辺 p_1p_4 と p_1p_2 は直交しているから, これらの回転軸も直交している. 従って, これらの回転を両立する動きの自由度は存在しない. このことから, p_2, p_4 は自動的に固定される. 問題 3 の答から, 板の 3 点が固定されたので p_3 も固定される.





問題 5. 何かできたら教えて下さい.

問題 6. (1) いわゆる三辺相等. (2) いわゆる二辺夾角相等. (3) 余弦定理より,

$$\cos\theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}.$$

[1] この解答は数学専攻修士課程 2 年の佐藤琉輝さんに考えていただきました.

問題 7. 自由度は $2n-3$. はじめの 2 点を基準の位置におく: $p_1=(0,0)$, $p_2=(a,0)$. ここで a は p_1,p_2 の間の距離. このとき, 平行移動と回転の自由度はすべて固定されているので, 残りの $p_3,\dots,p_n$ は自由に動く. 従って合計の自由度は

$$\underbrace{1}_{p_1,\,p_2\text{ の距離}} + \underbrace{2(n-2)}_{p_3,\dots,p_n\text{ の自由度}} = 2n-3$$

発展. d 次元空間内で考えるとき, 自由度は

$$\begin{cases} nd-\frac{d(d+1)}{2} & d\ge n\text{ のとき}, \\ n-1 & d<n\text{ のとき}. \end{cases}$$

$d<n$ のとき (簡単): 回転と平行移動を使って基準の位置

$$p_1=(0,\dots,0),\quad p_2=(a_2,0,\dots,0),\quad \dots,\quad p_n=(0,\dots,0,a_n)$$

に動かせる. 従って残りの自由度は p_1 からの距離 $a_2,\dots,a_n$ による $(n-1)$ パラメータで与えられる.

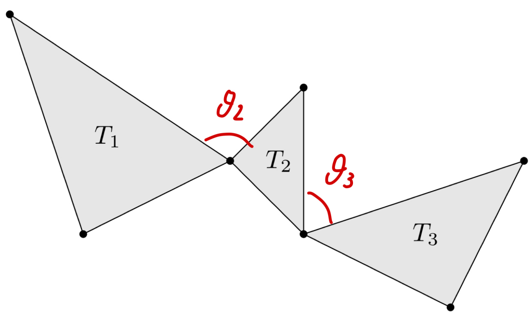
$d\ge n$ のとき (難): このときは全ての点を基準の位置に持っていくだけの対称性がない. 次のように考える: d 次元空間の回転と平行移動のなす群 $G=SO(d)\ltimes\mathbb{R}^d$ は次元 $d(d+1)/2$ を持つ. 配置空間 $X=\{(p_1,\dots,p_n)\in(\mathbb{R}^d)^n \mid \text{一般配置}\}$ は次元 nd を持つ. $d\ge n$ のとき, X への G 作用は固定点を持たず,

$$\dim(X/G)=\dim X-\dim G=nd-\frac{d(d+1)}{2}. \tag{0.1}$$

$d<n$ のときのように G 作用が固定点を持つ場合には次元公式 (0.1) は成り立たないことに注意.

問題 8. 自由度は $4k-1$. $T_1,\dots,T_k$ の形状 (合同類) を決めるのに $3k$ 個のパラメータが必要. T_1 の位置を固定する. このとき, 図のように $(k-1)$ 個のジョイント部分に角度パラメータ $\theta_2,\dots,\theta_k$ がある. これらを合計して

$$\underbrace{3k}_{\text{形状}} + \underbrace{(k-1)}_{\text{ジョイント角度}} = 4k-1.$$



問題 9. 三辺比相等などを考えて, $\dim\mathcal{M}'_{\text{三角形}}=2$.

問題 10. $\dim\mathcal{M}_{\text{直線}}=2$ である. 原点中心, 半径 1 の球面 S を考える. 各直線は, S 上に対称な 2 点を定める. 逆に, S 上の対称な 2 点の組はある直線の交点である. 従って, 1 対 1 対応

$$\mathcal{M}_{\text{直線}}\longleftrightarrow\{(x,-x)\mid x\in S\}$$

が得られる．ここで x を動かすとき $-x$ はそれにつれて動くので，球面 S 上の点 x の自由度を考えればよい．球面極座標で考えれば，x はパラメータ (θ, φ) で指定される 2 自由度を持つ．以上から $\dim \mathcal{M}_{\text{直線}} = 2$.

発展． $\mathcal{M}_{\text{直線}}$ は球面の全ての対称点の組を「同一視」して得られ，2 次元射影空間 $\mathbb{RP}^2$ と呼ばれる多様体になっている．