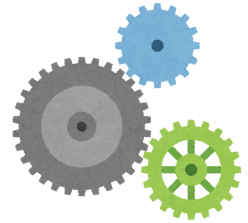


数学クイズ 2025

動きの「自由度」を数える



担当: 石橋典

東北大学大学院理学研究科数学専攻

突然ですが皆さんは、家具の組み立てをしたことがあるでしょうか？最近の家具は特別な工具を必要とせず、簡単なネジ止めだけで組み立て可能なことが多いです。図1のような組み立て説明書が商品に付いてきます。

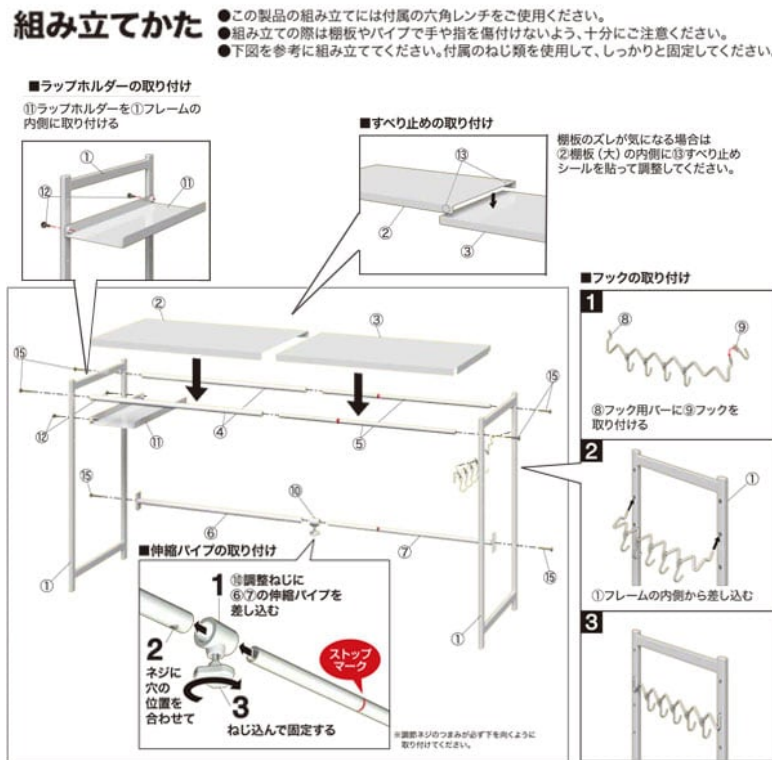


図1: 組み立て説明書 (出典: ニトリ 伸縮レンジ上ラック ER-5075 8987687)

初めはグラグラするパーツを手で押さえながら、ネジを止めていく必要があります。しかし段々とパーツが固定されてくると、パーツの動きが制限されてきて - 動きの「自由度」が減っていき - 手を離しても安定するようになってきます。ネジを全て止める前に、自立することもあるでしょう。最低限いくつのネジを止めれば安定するのか、優先して止めるべきネジはどこか？今回はこのような問題に数学としてアプローチしてみましょう。

難易度の目安を星の数で示します (全部順番に解く必要はないので、興味がある問題に挑戦してみよう!).

★: 肩慣らし.

★★: 紙に絵を描いて観察してみよう.

★★★: 本格的な問題.



1 点の動きの自由度

1.1 自由度という考え方

考え方の練習として、まずは無限に広がった平面上の点 P を考えてみます (図2). 点 P の位置は2つの実数の組 (x, y) – x 座標と y 座標 – を使って特定できるのでした. x と y の数値が変化すると、それに応じて点 P は平面上を動きます. 点 P の動きは2つの数 (パラメータ) で制御されているという意味で、「自由度2」を持っているということにしましょう.

あるいは、点 P の位置は原点からの距離 r と、 x 軸からの角度 θ を使って組 (r, θ) で表すこともできます. この場合にも2つの数値が必要で、やはり点 P の自由度は2です.

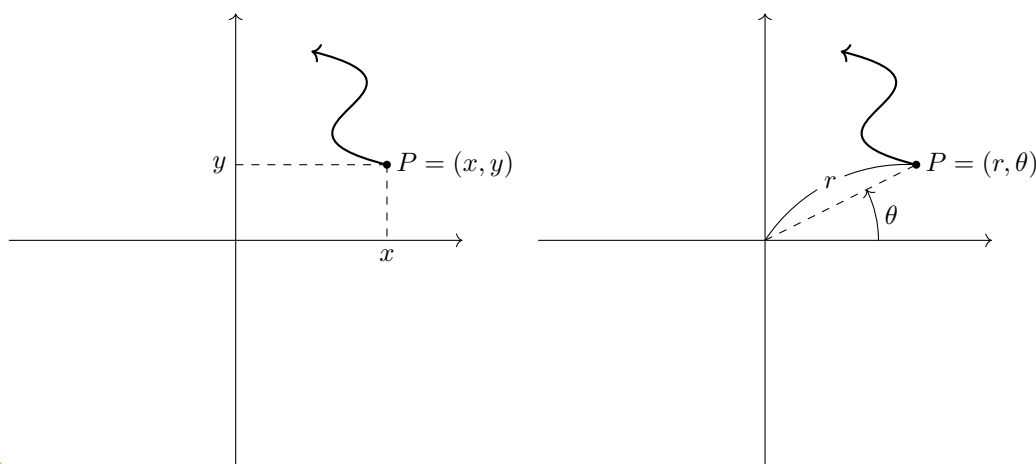


図 2: 平面上の点の動き

また、平面上に2つの点 P_1, P_2 があって独立に動くときは、この2つの点の合計の自由度は $2+2=4$ と考えることにします. 2点の位置を同時に指定するには合計4つのパラメータが必要ということです. ちなみに2点が偶然重なって同じ位置にある状態もありえますが、ここでは「動き」を記述したので、そういった特殊な状況は無視して一般的な状況だけ考えることにしましょう (以下の色々な設定でも同様で、一般的な状況だけ考えます).¹

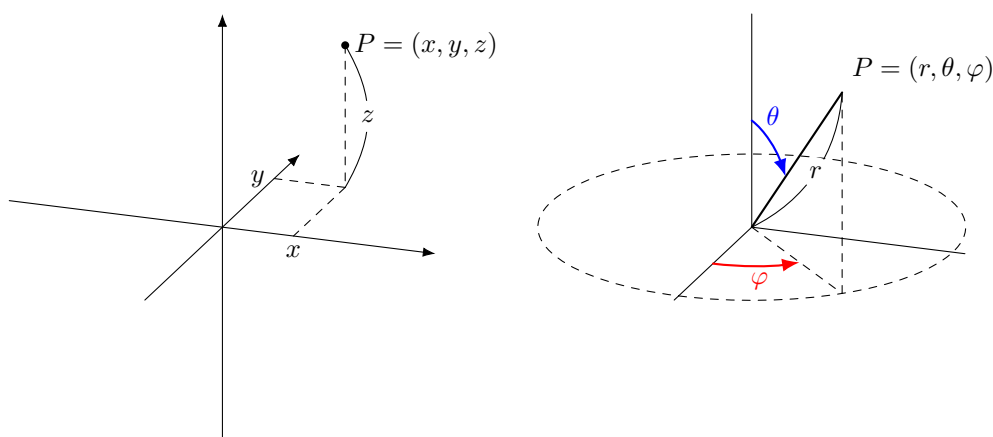


図 3: 3次元空間内の点の動き

¹気になる人向け: ここでいう「特殊な状況」とはパラメータ間の非自明な方程式で拘束されている状態 (今の場合は $P_1 = P_2$) を指します. 逆に、このような状態を避けたもの (今の場合、 $P_1 \neq P_2$) を「一般的な状況」と定義します.

3次元空間内では図3のように, 3つのパラメータの組 (x, y, z) あるいは (r, θ, φ) で点 P の動きを表すことができます. いずれにしても自由度は **3** です.

数学ではさらに想像を逞しくして, n 個のパラメータ $(x_1, \dots, x_n)$ で点の位置が指定されるような“ n 次元空間”というものも考えることができます. その中の点の動きの自由度は n です.²

1.2 拘束条件下での点の動きの自由度

ここまでは点が自由に動いていましたが, 動きが制限された状況を考えてみましょう.

図4左のように, 点の動きが半径 r の円周上に制限された状況を考えてみましょう. 現実的なモデルとしては, 一方の端点 O が原点に固定された長さ r の棒 (剛体) の先端 P の動きに着目すると考えてもよいです (図4右). この場合, 組 (r, θ) のうち動かせるのは角度パラメータ θ のみです. 従って, この点 P の動きの自由度は **1** に下がりました.

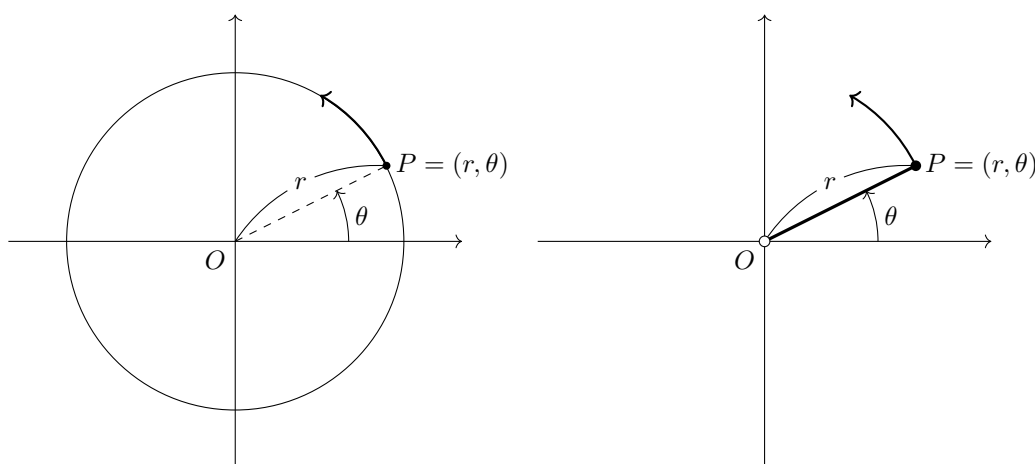
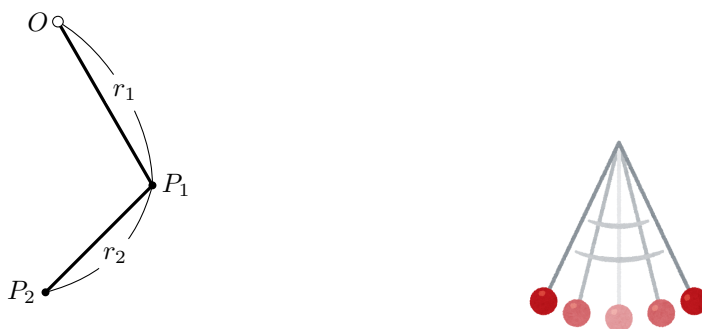


図4: 半径 r の円周上に制限された点の動き, あるいは長さ r の棒の動き

問題 1 (★). ここで肩慣らしクイズです! 図のような二重振り子を考えます. 棒の長さ r_1, r_2 は固定で, 平面内を動き, 白端点は原点 O に固定されているとします. このとき, 点 P_1, P_2 の動きの合計自由度はいくつでしょうか? (余裕のある人は, n 個の棒を連結した n 重振り子についても考えてみてください.)



²数学的には, 高次元空間の「実体」(例えば4番目の座標の意味とか)は考える必要がありません. 単に, 点の位置を表すのに必要なパラメータの個数が n ということです. 例えば2点の独立な動きを表すには4つのパラメータが必要だったので, 4次元空間で運動を記述することになります.

問題 2 (*). 問題 1 の状況で, P_1 または P_2 のどちらかを選んで平面内の任意の位置に固定 (“ネジ止め”) できるとします. どちらがより多くの自由度を奪うでしょうか? (余裕があれば, n 重振り子についても考えてみてください.)

1.3 長方形の動きの自由度

考え方に慣れてきたところで, 家具の組み立てに戻ってみましょう. 板のパーツ (図 1 の②, ③) の動きの自由度を考えてみます. 設定を簡単にするため, 「板」は厚みのない長方形であるとして (図 5).

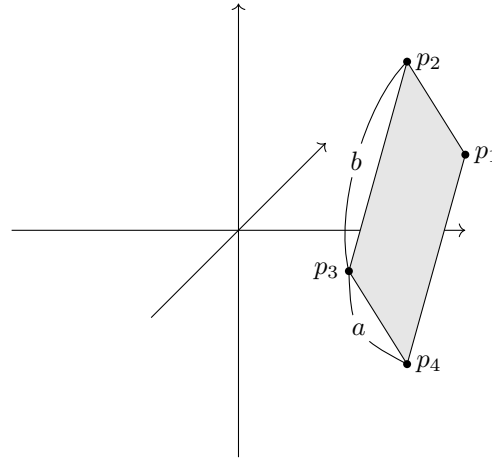


図 5: 3次元空間内に配置された縦横の長さ (a, b) 長方形.

問題 3 (**). 長方形の端点 p_1, p_2, p_3, p_4 のうちから何点かを選んで空間内の任意の位置に固定 (“ネジ止め”) できるとします. 最小で何点固定すれば長方形の位置が固定できるでしょうか?

次は発展編です. 図 6 のように, 先程の例に「脚」が生えた「机」を考えましょう.

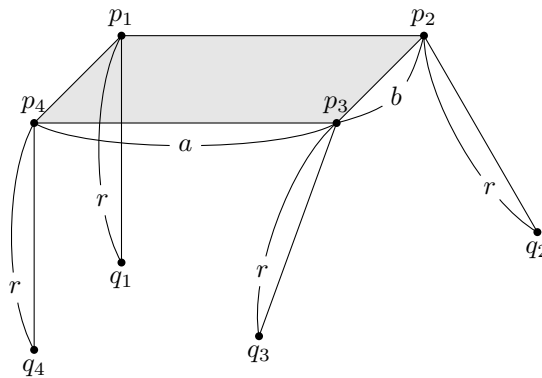


図 6: 3次元空間内に配置された机.

問題 4 (***). 図 6 の 8 点 p_i, q_i ($i = 1, 2, 3, 4$) のうち, 最小で何点固定すれば机の位置が固定できるでしょうか? (ここで, 板と脚の繋ぎ目はボールジョイントのように 360° 回転できるとします. また, 脚が板に対して直角である必要や, 机が直立する必要はありません.)³

³少なくとも脚の 4 点 q_i は固定する必要がありますが... (1) q_i を特別な位置に固定すると残り全てが決まります. どのような配置でしょうか? (2) q_i を一般の位置に置くときは, 何点固定すれば良いでしょうか?

問題 5 (***). 自由に想像を膨らませて、面白い問題を考えてみてください。何かできたら教えて下さい。

2 動きの相対的な自由度

今度は少し視点を変えて、点や物体の「相対的な」動きに着目してみましょう。つまり、全体を一斉に平行移動したり、回転したりして移り合う配置は同じものとみなすことにします。考え方を練習してみましょう。

図 7 のように、平面内の 2 点 P, Q の位置関係を考えます。

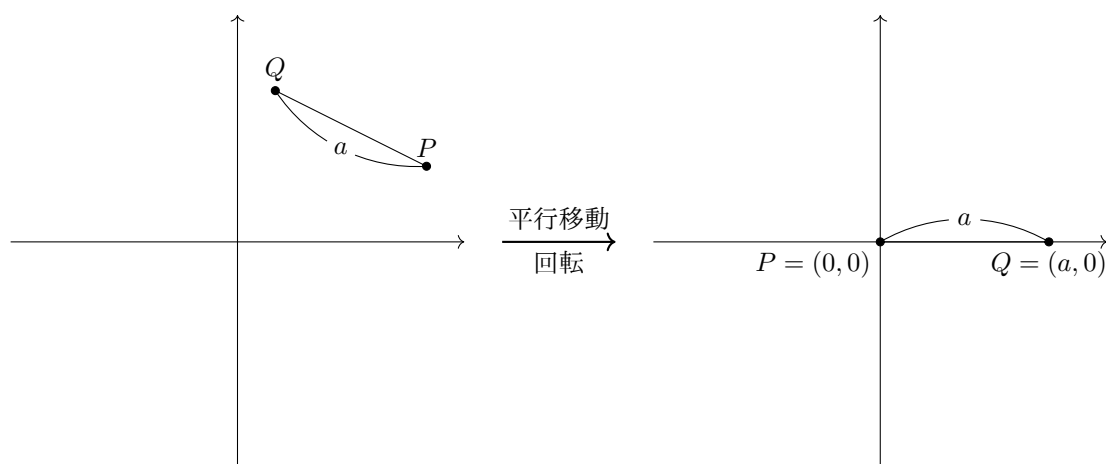


図 7: 平面上の 2 点の相対位置

ここでは、2 点 P, Q を一斉に平行移動や回転しても変わらない位置関係に着目したいので、まず適切な平行移動によって点 P を原点に移動します。その後、原点を中心とする回転によって Q を正の x 軸上に移動することで 2 点を「基準の位置」

$$P = (0, 0), \quad Q = (a, 0)$$

に移動できます。ここで $a > 0$ は 2 点間の距離です。結論として、任意の 2 点 P, Q の相対位置は距離 a という一つのパラメータで表せることが分かりました。従って、2 点の「相対自由度は 1」と考えることにします。

観察. ちなみに、 n 次元空間内の 2 点 P, Q についても上の議論と全く同様にして基準の位置 $P = (0, 0, \dots, 0)$, $Q = (a, 0, \dots, 0)$ に移動することができます。従って、2 点の相対自由度は空間の次元に関係なく、いつでも 1 です。

2.1 3 点の相対自由度

3 点 p, q, r の相対的な動きの自由度を考えます。この場合、 p, q, r を 3 頂点とする三角形 T に着目することで考えやすくなります。一斉に平行移動や回転で移り合う状態は、合同な三角形に対応するからです。合同な三角形について、皆さんの知っている知識を活用してみましょう。

問題 6 (**). (1) 三角形 T の三辺の長さ (a, b, c) に着目することで、3 点の相対的な自由度が 3 であることを観察してください。

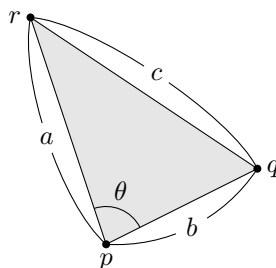


図 8: 3 点の相対位置

- (2) 三角形 T の二辺の長さとその間の角度 (a, b, θ) に着目することで, 3 点の相対的な自由度が 3 であることを観察してください.
- (3) 角度 θ を (a, b, c) を使って表してください. 逆に, 3 つ目の長さ c を (a, b, θ) を使って表してください.

ヒント: 1. と 2. は中学校で習う合同の知識です. 3. は三角比のある定理を思い出すと分かります. 現代数学ではこの問いの答えをどのように幾何学的に捉えるか, 3 節で少し紹介します.

2.2 色々な一般化

問題 7 (★★). 整数 $n \geq 3$ に対し, n 点 $p_1, \dots, p_n$ の相対的な自由度はいくつでしょうか? (ヒント: p_1, p_2 を「基準の位置」に置いてみましょう)

問題 8 (★★★). 図のように平面内で k 個の三角形 $T_1, \dots, T_k$ が 1 点で連結された「鎖」を考えます ($k \geq 1$). 各三角形の形 (例えば, 三辺の長さ) や結合部分の角度は自由に動きます. 全体を一斉に平行移動や回転したものは同じとみなします. このような鎖の自由度はいくつでしょうか?

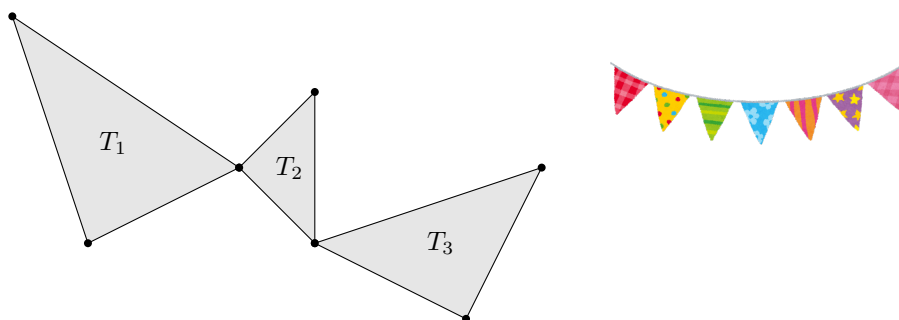


図 9: 三角形の鎖 ($k = 3$).

3 おわりに: モジュライ空間への招待

今回は, 日常に潜む数学的な問題に焦点を当ててみました. 実は, ここで紹介した「自由度」という考え方は現代数学における「モジュライ問題」という幾何学の研究につながる考え方になっています.⁴ 大学数学の雰囲気を感じる意味で, ちょっと説明してみましょう.

⁴長さや重さなどの「尺度」を英語で modulus (モジュラス) と言い, その複数形が moduli (モジュライ) です. 西洋から伝わった数学の概念は, 無理に和訳せずそのまま使うことがあります.

* 以下は数学科の2～3年生くらい向けの説明です。将来大学で数学を学び、理解できるようになるのをお楽しみに *

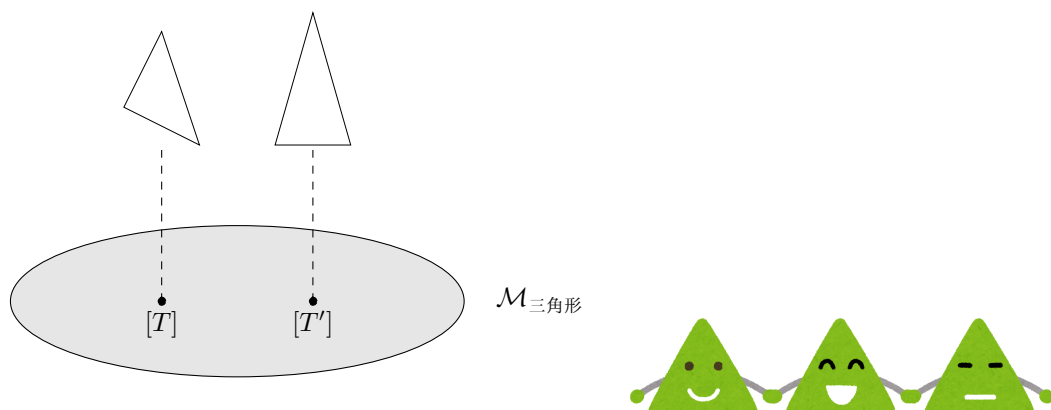


図 10: モジュライ空間 $\mathcal{M}_{\text{三角形}}$ のイメージ

問題5で考えた設定は、「三角形全体のモジュライ空間」 $\mathcal{M}_{\text{三角形}}$ の次元および座標系を与えたこととなります。 $\mathcal{M}_{\text{三角形}}$ は、三角形の合同類全体のなす集合です。 $\mathcal{M}_{\text{三角形}}$ の1点1点が形の異なる三角形に対応します(図10)。たくさんの三角形たちが暮らす村のように思ってもよいでしょう。中には非常に似通った(“形が近い”)三角形や、そうでないものがあるわけですが、どのような尺度で似ていると判断するかを決めなければなりません。これがモジュライ空間に「座標系」を設定することです。⁵

(1)の答え(三辺相等)からは、一対一対応(全単射)

$$f_1 : \mathcal{M}_{\text{三角形}} \xrightarrow{\sim} \{(a, b, c) \mid |a - b| < c < a + b\}$$

が得られます。ここでは(右辺の三角不等式はあまり重要ではなく)3つのパラメータ (a, b, c) が三角形の合同類を完全に区別している、つまり $\mathcal{M}_{\text{三角形}}$ の座標系になっていることが重要です。このような実数パラメータの組による座標系を持った空間を多様体と呼びます。⁶

(2)の答え(二辺夾角相当)からは、別の一対一対応(全単射)

$$f_2 : \mathcal{M}_{\text{三角形}} \xrightarrow{\sim} \{(a, b, \theta) \mid 0 < \theta < \pi\}$$

が得られます。これは多様体 $\mathcal{M}_{\text{三角形}}$ 上の別の座標系とみなせます。ちょうど、平面が直交座標系 (x, y) と、極座標系 (r, θ) の2種類の座標系を持っているようなものです。

ではこれらの座標系間の「座標変換」は何か？これが(3)です。これは三角比において大変重要な「余弦定理」が答えになります。このように、余弦定理はモジュライ空間 $\mathcal{M}_{\text{三角形}}$ 上の座標変換則として重要な意味を持っているのです。

現代数学では、さまざまな分類対象(例: 三角形)および分類基準(例: 合同)に応じて色々なモジュライ空間を考えることができます。モジュライ空間上の座標系や、それらの変換則は分類対象の深い性質を反映していることがあります。新たな座標系を発見すること自体が新しい論文になったりするのですが、そこでは対象をよく観察し、どこを「ネジ止め」すれば動きが制御できるのか、という考え方が基本になっています。皆さんもこの機会に、色々なモジュライ空間に想いを馳せてみてください。

⁵例えば、人間たちの「モジュライ空間」を考えようと思ったときには、身長が近い人を似ていると判断したり、声が近い人を似ていると判断したり、色々な尺度が考えられるわけです。

⁶学部3年生で学習します。現代幾何学の研究の多くは何らかの多様体に関する考察と言ってよいと思います。



問題 9 (***). 平面内の三角形全体を「相似」を基準として分類するとき, 対応するモジュライ空間 $\mathcal{M}'_{\text{三角形}}$ の次元はいくつでしょうか? (つまり, 2つの相似でない三角形は何個のパラメータで区別されるでしょうか?)

問題 10 (***). 3次元空間内の原点を通る直線全体を (素直な基準で) 分類するとき, 対応するモジュライ空間 $\mathcal{M}_{\text{直線}}$ の次元はいくつでしょうか?