

直交する直線, 平面, 空間?

東北大学大学院理学研究科数学専攻修士 2 年 宮川 寛基

2022 年 7 月 27, 28 日

1 はじめに

2 つの線分や平面が直交しているとは, そのなす角が直角, すなわち 90° であることをいいます. ここでは, 高校生までの数学で習うようなところから始め, それをより一般化したものを考えていきます. 厳密にやろうとするととても長くなってしまうので, 曖昧な表現をよく使います. そのときには, 「」をつけて表します.

たまにでてくる問題は理解の助けになるように設置しましたが, 飛ばしても内容が理解できるようにはしてあります. 興味がある方は是非取り組んでみてください. 最後に解答があります.

2 2 次元, 3 次元における直交

皆さんも, コンパスや三角定規などを使って垂線を作図したことがあると思います. 作図ができたとき, その 2 本の線分は直交しています. これが初めの方にてでくる直交の概念ではないでしょうか. また立体図形では, 直方体のある面に対して垂直な面について考えたりします.

2.1 ベクトル

高校数学ではベクトルを習います. 直交と関連が深いものとして, **内積**があります. ベクトルが直交していることと, 内積が 0 であることは同値です.

2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ との内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ は,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

と表せます.

例 1

$$\begin{aligned}(1, 2, -1) \cdot (2, -4, -6) &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-6) \\ &= 0.\end{aligned}$$

よって $(1, 2, -1)$ と $(2, -4, -6)$ は直交しています.

2.2 直交補空間

3次元空間内の xy 平面に対して、それに垂直な直線である z 軸を考えます。 xy 平面内の**一次独立**、すなわち零ベクトルでなく平行でもない2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ は、 z 軸上のどのベクトル $\vec{c}$ とも一次独立です。 xy 平面上のベクトルはすべて $\vec{a}$, $\vec{b}$ の一次結合で表せます。しかしこの一次結合では2次元平面内のベクトルしか表せず、3次元空間のベクトルを表すには z 軸が必要です。

定義 1

上のように、 z 軸は xy 平面の足りないところを「補って」いて、さらに直交しています。ある空間に対して、その空間上のすべてのベクトルに対して直交しているようなベクトルの集まりを、**直交補空間**といいます。今回の例だと、 xy 平面上のベクトルと z 軸上のベクトルは常に内積が0、つまり直交しています。つまり xy 平面は z 軸の直交補空間であり、逆に z 軸は xy 平面の直交補空間です。

定義 2 (生成される空間)

例えば、3次元空間の xy 平面の点は、 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ の一次結合ですべて表せます。このようにいくつかのベクトルの一次結合で表せる点全体のことを、**生成される空間**といい、そのベクトルの組を $\langle \rangle$ で囲んで表します。今挙げた例だと、 xy 平面は $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ で生成されるといい、その生成される空間は、 $\langle(1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle (= xy \text{ 平面})$ と表します。

注意: 高校までの数学では、2次元を平面、3次元を空間と呼んでいましたが、ここでは1次元でも2次元でも空間と呼ぶことがあります。

例 2

$\langle(1, -1, 2)\rangle$ と $\langle(2, -2, 4)\rangle$ は、成分を定数倍しただけなので同じものです。また、 $\langle(1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle$ と $\langle(1, -1, 0), (1, 2, 0)\rangle$ は同じもので、どちらも xy 平面を表します。ここで伝えたいことは、生成される空間の表し方はいくらでもあるということです。

例 3

$\langle(0, 0, 1)\rangle$ は z 軸を表します。 $\langle(1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle$ は $\langle(0, 0, 1)\rangle$ の直交補空間です。

注意: 3次元空間では、2次元空間の直交補空間は1次元空間で、逆に1次元空間の直交補空間は2次元空間です。これは $3 - 2 = 1$, $3 - 1 = 2$ であることからきています。

問題 1

3次元空間の中で、 $\langle(1, -1, 0), (-1, 0, 1)\rangle$ の直交補空間を求めてください。

2.3 基底

高校数学では2,3個のベクトルに対して**一次独立**という言葉を実義していますが、一般に k 個のベクトルに対しても一次独立性を実義できます。

定義 3 (一次独立)

ベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ に対して, $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \dots + c_k\vec{a}_k = \vec{0}$ をみたす実数の組 $(c_1, c_2, \dots, c_k)$ が $(c_1, c_2, \dots, c_k) = (0, 0, \dots, 0)$ のみであるとき, ベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ は**一次独立**であるといいます.

一次独立性は, 一般にベクトルの本数を増やすと成り立ちにくくなり, 一方で生成される空間が全体と一致する (つまり考えている空間のすべての点が, 与えられたベクトルの一次結合で表せる) という性質は, ベクトルの個数を減らすと成り立ちにくくなります.

ベクトルの個数を増やす $\rightarrow$ 一次独立にはなりにくく, 生成される空間が全体と一致しやすい.

ベクトルの個数を減らす $\rightarrow$ 一次独立にはなりやすく, 生成される空間が全体と一致しにくい.

これら 2 つが同時に成り立つようなベクトルの個数が 1 つだけあり, そのようなベクトルの組が色々な分野で重要な役割を果たしています. 3 次元だとその個数は 3 で, 後で出てくる n 次元では, その個数は n です. 線形代数学では, 基底をなすベクトルの個数で次元を定義しています.

定義 4 (基底)

ある 3 つのベクトルの組 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が一次独立で, その 3 つで生成される空間 $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ が 3 次元空間全体と一致するとき, ベクトルの組 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ は 3 次元空間の**基底**であるといいます. さらに $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ が互いに直交するとき, 特に**直交基底**であるといい, 加えて $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ であるとき, **正規直交基底**であるといいます.

例 4

$\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ とすると, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3), (\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ はどちらも 3 次元空間の基底です. 特に 1 つ目は正規直交基底です. 基底をなすベクトルの数は決まっていますが, その組み合わせはいくらでもあります.

3 4 次元, n 次元における直交

ここからが高校数学の範囲外です. これまではいま我々が暮らしている 3 次元までの話しかしてきませんでした. 3 次元までと比べて 4 次元以上の難しさはどこにあるかというと, 圧倒的に**想像ができない**ことです. つまり図形的に考えることが難しいので, 数式でなんとかします (補助的に簡単な場合を図でかくこともあります). またこの節の内容は, 大学 1 年生で習う**線形代数学**の内容です.

3.1 4 次元のベクトル, n 次元のベクトル

これまで平面ベクトルは $(1, 0)$, 空間ベクトルは $(1, 0, 0)$ のように表してきました. 4 次元空間のベクトルは $(1, 0, 0, 0)$ のように 4 つの数字を並べて表します. 感覚的には, x, y, z 軸に加えてもう 1 本軸があります.

一般に, n 次元空間 (n は自然数) のベクトルは $\underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_{n \text{ 個}}$ と n 個の数字を並べて表します. n 次元なので, 感覚的には n 本の軸があります.

n 次元のベクトルにも、これまでと同様に内積を定義します。すなわち $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ に対して

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

と定義します。

3.2 n 次元の直交補空間

前の節と同様に、直交補空間について考えます。

問題 2

4 次元空間の中で、 $\langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle$ の直交補空間を求めてください。

注意: 一般に、 n 次元空間の中で、 k 次元空間の直交補空間は $n - k$ 次元であることが知られています。これを用いると、上の問題では直交補空間は 2 次元なので、与えられた空間に直交するベクトルが 2 つとれた時点でそれらの一次結合が求めるものであることがわかります。

問題 3

4 次元空間の中で、 $\langle (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1) \rangle$ の直交補空間を求めてください。

3.3 n 次元の基底

3 次元と同様に、 n 次元空間にも同様に基底が存在します。

例 5

$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $\vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ とすると、 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ はどちらも n 次元空間の基底です。特に 1 つ目は正規直交基底です。

4 無限次元における直交

前の節までは有限次元について扱い、完全に一般化できたように思えますが、さらに先があります。

4.1 数列

高校数学の数列の単元では、無限に続くような数字の列について考えます。実はそれは無限次元のベクトルの 1 つです。数列の和が、無限次元のベクトルの和に対応しています。

例 6

数列 $a_n = 2n$ は、 $(2, 4, 6, \dots)$ という無限に数が続くベクトルと考えられます。さらに数列 $b_n = 3n - 1$ を考えるとこれは $(2, 5, 8, \dots)$ というベクトルに対応しており、その和は $a_n + b_n = 5n - 1$ なので、これは $(4, 9, 14, \dots)$ という無限に数が続くベクトルだと思えます。

4.2 関数解析

これは私が専門にしている分野で、簡単にいうと無限次元の空間について考える分野です。例えば連続な関数 (つまりグラフがつながっている関数) の集合は無限次元になっていて、そのような「ある性質をみたすような関数」の集合について考えます (それらは大抵無限次元になっています)。

例 7

数列 a_n は、自然数 n に対して実数 $a(n) = a_n$ を対応させる関数と考えることができます。

数学 III の積分の範囲まで知っている方は、次を見たことがあるかもしれません：

k, l を自然数とすると、

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx \, dx = \begin{cases} 1 & (k = l), \\ 0 & (k \neq l). \end{cases}$$

これは問題集などで出てきて解いて終わるだけかと思いますが、 n 次元で考えていたものとよく似ています。

$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ とする。 k, l を 1 から n までの自然数とすると、

$$\vec{e}_k \cdot \vec{e}_l = \begin{cases} 1 & (k = l), \\ 0 & (k \neq l). \end{cases}$$

高校数学では、平面や空間のベクトルに対して内積を定めていました。関数解析では、より一般に内積について扱います。例えば関数 f, g に対して内積を

$$f \cdot g = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \, dx$$

のように定めることができ、先ほどの積分から $k \neq l$ のとき、 $\sin kx$ と $\sin lx$ はこの内積の意味で「直交している」ということがわかります。三角関数の直交性は、**フーリエ解析**という分野でも重要で、ある関数空間の正規直交基底が三角関数を使って表せることが知られており、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

のように関数が表せます。これは n 次元でいうところの

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^n a_k \vec{e}_k$$

に対応しています。ここで a_k, b_k は実数です。

注意: 積分の前についている $1/\pi$ は、**正規化** (大きさを 1 にすること) のためのものです。

4.3 無限次元空間の直交補空間

次に、無限次元空間の直交補空間について考えます。 n 次元空間であれば、合計 n 個になるようにベクトルをいくつかみつければ直交補空間を求められました。つまり考えていた空間の残りを、全て直交補空間が補っ

てくれていました。ただ無限次元だとそうはいかず、直交補空間を含めても空間全体を補えるとは限りません。しかし、ある性質をみたしているような空間であれば有限次元と同じように、直交補空間によって全てを埋め尽くせます。それが次の主張です。専門的な用語がいくつかありますが、主張だけを述べます。

定理 1 (直交分解定理)

H を Hilbert 空間とし、 $M \subset H$ をその閉部分空間とする。このときある閉部分空間 $N \subset H$ が存在して、どんな $x \in H$ に対してもただひとつの $y \in M, z \in N$ が存在して、 $x = y + z, y \cdot z = 0$ をみたす。

ここで出てきた N が、 M の直交補空間で、 $y \cdot z$ というのは y と z との「内積」(これまででてきたように、ただ成分をかけて足すというものとは限りませんが) です。

5 なぜ直交を考えるのか

少々直交について話していますが、それが一体どこで役立つのか、というのが気になるころではあると思います。

私が思うメリットの 1 つは、式変形において項が少なくなり、一部だけをみれば十分になるということです。例えば数学 I で習う余弦定理は

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

という式ですが、もし $A = 90^\circ$ であれば、

$$a^2 = b^2 + c^2$$

となり (三平方の定理)、複雑な項が消えます。またベクトルの分野では、

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

という式が成り立ちますが、これも余弦定理と同じ意味の式です。 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が直交していれば $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ですから、

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$$

となります。変数が 2 つあるとき、感覚的にはその 2 つが「作用しあっている項」は解析が難しいことが多いです。しかし上の例ではそれを防いでくれます。さらに高校数学の枠を超えて、大学生で学ぶ線形代数における対角化では、計算が複雑になる対角成分以外の部分を消すことができ、フーリエ解析におけるフーリエ級数では 4.2 節で述べたように、複雑な関数を比較的簡単である三角関数の和で表すことで、単純なものにできます。

その他にも、例えば円の外側にある点を 1 つ決めて、円の内部にある点を動かして 2 点間の距離を最小化しようとしたときにも直交性がでてきます。不等式評価は上からの評価 (どんどん大きくしていくこと) が多いですが、逆にここで得られるような下から抑えられる式 (変形している式がある数以上という不等式) は少なく、貴重な情報です。

6 おわりに

ここまでいかがだったでしょうか。曖昧な表現を多く使ってしまいましたが、感覚的な部分が伝わっていたり、専門的な数学に興味をもってもらえたら幸いです。さらに興味をもっていただけた方に向けてキーワード

を以下にいくつか載せるので、それを調べてもらえるとより理解が深まると思います。最後まで読んで下さりありがとうございました。

キーワード

- ベクトル空間, 基底, 行列, 直交行列, Schmidt(シュミット) の直交化法
- Fourier(フーリエ) 級数
- 内積空間, ノルム空間, Banach(バナッハ) 空間, Hilbert(ヒルベルト) 空間
- 数列空間, Lebesgue(ルベーグ) 空間

7 問題の解答

問題 1 の解答

$(1, -1, 0) \cdot (-1, 0, 1) = 0$ なので, $\langle (1, -1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$ は 2 次元空間になっています. つまり求める直交補空間は 1 次元です. それを生成するベクトルの 1 つを (x, y, z) とおくと,

$$(1, -1, 0) \cdot (x, y, z) = 0, \quad (-1, 0, 1) \cdot (x, y, z) = 0$$

をみます (そのようなベクトルは無限にあります. ただしそれはすべて求める直交補空間上の点です). よって求める直交補空間は

$$\langle (-1, -1, -1) \rangle$$

とかけます.

また, 外積を知っている方であれば,

$$(1, -1, 0) \times (-1, 0, 1) = (-1, -1, -1)$$

とすぐに導出することができます. □

問題 2 の解答

$(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$ の 2 つとも直交するベクトルを求めればよく, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$ がそれに該当します. この 2 つは一次独立であり, 他に直交するようなベクトルはすべてこの 2 つの一次結合で表せます. よって求める直交補空間は $\langle (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$ です. □

問題 3 の解答

上の注意から, 直交補空間の次元は 2 です. $(1, 0, -1, 0)$, $(0, 1, 0, -1)$ は一次独立で, どちらも, $(1, 0, 1, 0)$ と $(0, 1, 0, 1)$ とともに直交しています. よって求める直交補空間は

$$\langle (1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1) \rangle$$

です. □

参考文献

- [1] 新井 仁之, 新・フーリエ解析と関数解析学, 培風館, 2010.