数学クイズ

2018 年 7 月 27 日

出題者 : 甲斐亘 (代数学講座)

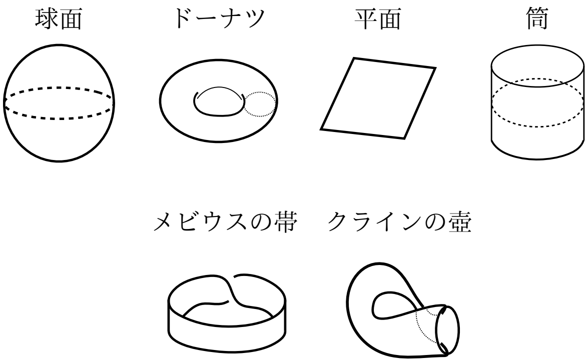
伊能忠敬像
千葉県香取市　伊能忠敬記念館所蔵

1　伊能忠敬・没後 200 年の今年・・・直線たちのなす「地図」を描く

伊能忠敬 (1745 年 2 月 11 日–1818 年 5 月 17 日 [現在の暦]) は現在の千葉県九十九里町に生まれ, 香取市佐原で商家を営みました. 33 歳の時には夫婦で松島に旅行に来ました. 満 49 歳で隠居し, 翌年から江戸で暦学を学びはじめました. 1800 年, 幕府の命令と協力により, 蝦夷地の測量の旅に出ました. 目的は, 南北方向に大きなスケールでの測量を行なって地球のサイズを正確に知り, 季節をよく予測する暦を作ることと, ロシアの船が出没しはじめていた蝦夷地の地形を把握することだったようです.

その後, 成果としてまとめられた蝦夷地の地図が高い評価を受け, 以後, 1816 年に至るまで, 合計 10 次にわたり日本全国の測量を行いました (第 9 次には本人は不参加). 「大日本沿海輿地全図」は忠敬の死後 1821 年に完成し, 幕府に秘蔵されていましたが, うっかり者の書物奉行を通じてドイツ人医師 Siebold により国外に持ち出され, のちには逆輸入されて幕末までには国内外の多くの人の目に触れることになりました.

■**Today's big question**　平面上にある直線をすべてプロットした「地図」は, 以下のうちどの形をしているだろうか? (問題の意味は, おいおい説明されます.)



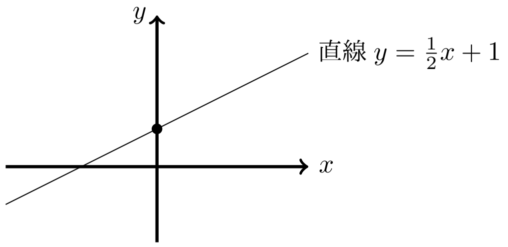
■**オープニング クイズ**　「大日本沿海輿地全図」(のうち, いわゆる「大図」) は, たくさんの小さな地図の集合体で, 日本の海岸線をカバーしたものでしたが, その小さな地図はいったい何枚だったでしょうか?

(地図は, 国土地理院 HP より. https://kochizu.gsi.go.jp/inouzu/saisyokuzu/index-map)

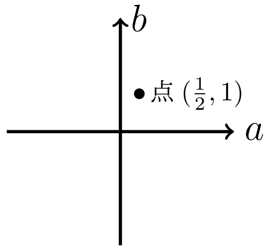
■直線たちのなす「地図」 中学校で学んだ事実

> xy 平面内の, y 軸に平行でない直線は, 方程式
> $$y = ax + b \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$
> で書ける.

に不満を感じたことはないでしょうか. そう, 「y 軸に平行でない」という部分にです. 出来ることなら, y 軸に平行な縦向きの直線も, まとめて表したいですよね.



$\Leftrightarrow$



直線を二つのパラメータ (a, b) で指定できる. ただし, 垂直な直線はあらわせない!

高校に入ってから, 次のこと

> xy 平面内のすべての直線は, 方程式
> $$ax + by + c = 0 \qquad (a, b, c \in \mathbb{R} \quad \text{ただし } a = b = 0 \text{ の場合を除く})$$
> で表すことができる. (この直線を $\ell_{a,b,c}$ とでも書くことにしよう.)

を既に学んだ皆さんも多いことでしょう. y 軸に平行な直線もまとめて同じ式で表せるようになりました. しかし, 係数が 2 つ (a, b) から 3 つ (a, b, c) に増えてしまいました. このことにより, 一見異なった方程式が, 同じ直線を表してしまうことがあります. 0 でない実数 $r \neq 0$ で方程式全体を r 倍しても, 表す直線は変わらないのです:

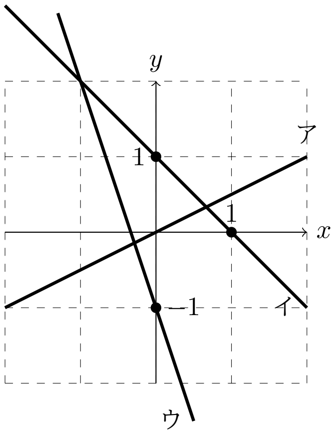
$$\ell_{a,b,c} = \ell_{ra,rb,rc} \quad .$$

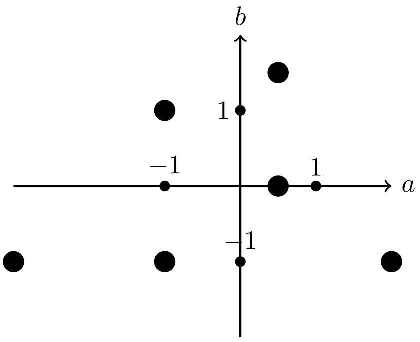
(たとえば, 直線 $x + y = -1$ と $3x + 3y = -3$ は同じものである.)

> **■疑問** すべての直線を, 無駄なく表示することはできるのか? その場合, 方程式に現れる係数 (上の (a, b) や (a, b, c) のような) は, どのような「領域」を動くのか?

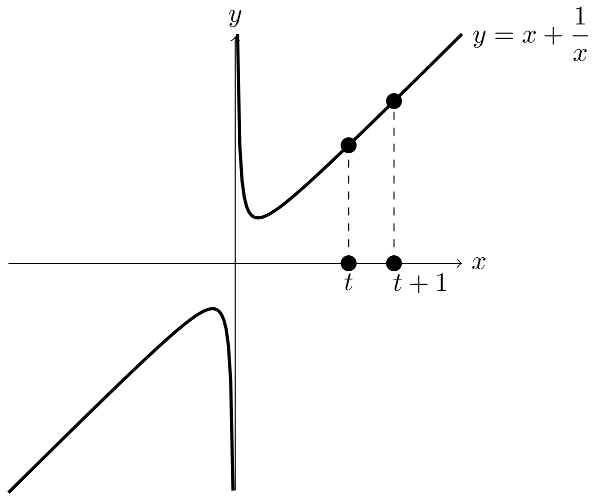
ここでいう「領域」とは, すべての直線が載った「地図」のようなものだと想像することにします. 直線ひとつひとつに対して「地図」の点がひとつだけ対応し, 「地図」の点を選ぶと直線がひとつ決まる. そのそうなものを想定しています.

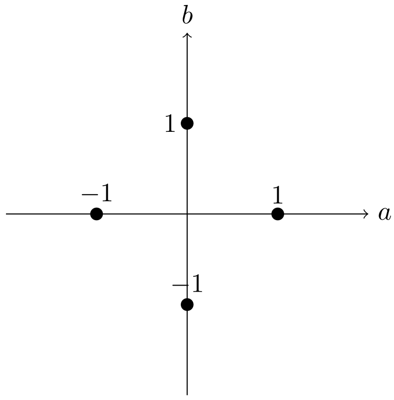
■肩ならしクイズ　i. 次の直線を $y = ax + b$ の形に表したときに, その (a, b) の値を座標平面にプロットすると, 右図のどの点になるでしょうか?





ii. 曲線 $y = x + \dfrac{1}{x}$ 上の x 座標が t と $t+1$ である点を結ぶ直線の式を書き下してみよう. $t = 0.5,\ 1,\ 10,\ 100$ のとき, 対応する ab-平面の点はどこか? t を無限大に増やしていくとき, この ab-平面上の点はどこに近づいていくだろうか?





iii. Today's big question への答えを, 直感で予想してみてください.

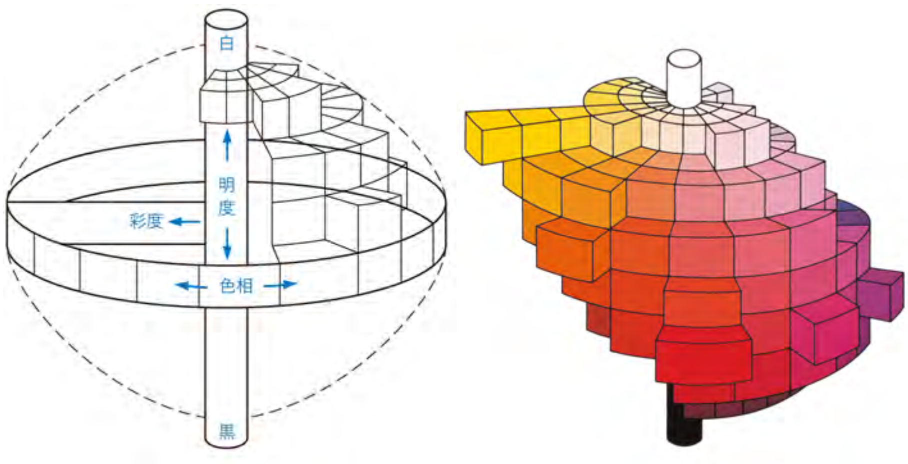
■色をプロットした「地図」　直線のような抽象的なものを地図にプロットするということの意味を少し考えたいと思います．

たとえば, 別の分野の話にはなりますが, 色を表す「地図」と言えるものがあります．色を体系的にあらわす方法はいろいろと提案されていますが, 代表的なものとしてマンセル表色系があります．それによると, 色は次の 3 つのパラメータ:

- 「色相」= それが赤い色をしているのか, 青い色をしているのか, それとも黄色なのか;
- 「彩度」= 色の濃さ; そして
- 「明度」= 明るさ

で表すことができます．

そして, 人間の認識できる色を全てプロットすると, 3 次元空間の中の団子のような形の領域に分布します．つまり, すべての色が載った「地図」は, この団子形であるということです．



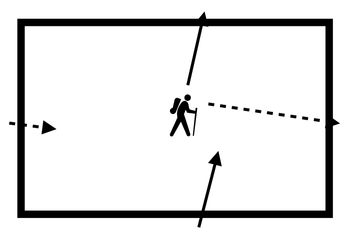
マンセル色立体. 資料提供：コニカミノルタジャパン (株)

直線の話に戻ります．中学校の方程式 “$y = ax + b$” では, 「傾き」と「y 切片」という二つのパラメータで直線を表したものでした．この係数 (a, b) をプロットした ab-平面は, y 軸に平行な直線以外が載っている「地図」なのでした．しかし, すべての直線を網羅できていないという点で, 「地図」として不十分であるというのが, 私たちの今の不満なわけです．

高校の方程式では, abc-空間を「地図」として使っています．(ただし $(0, 0, c)$ の形の点を除く.) 初めの 2 座標 (a, b) で法線ベクトルを, 第 3 の座標 c で原点からの離れ具合を表すわけです．これは, すべての直線をカバーしているという好ましい性質がある一方, ダブりが大量にあるという点で, 効率が良いとは言えないのです．

■いろいろな形をした「地図」　ところで「地図」は必ずしも平らな平面に描かれたものとは限りません．私たちの住む惑星全体の「地図」は, おおむね球形をしています．

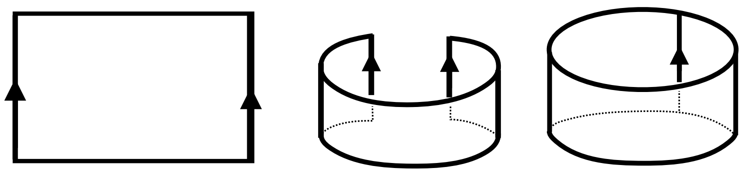
左: 約 500 年前のインドの世界観.
図は 1876 年の出版物にあるらしい.
Wikipedia “World Turtle” より.
右: RPG でたまにあるマップ.



また, テレビゲームの RPG でたまに見る地図として, 四角形だけれども上辺と下辺, 左辺と右辺がそれぞれつながっているものがあります．これは通常のユークリッド平面の一部としては描けません．(じつは, 下で説明するように, この場合には, 世界の形は本質的にドーナツの表面と同じ形をしている.)

■中間クイズ　四角形の境界を接着して通常と違う 2 次元空間を作るという操作は便利なので, ここで少し詳しく見ておきましょう.

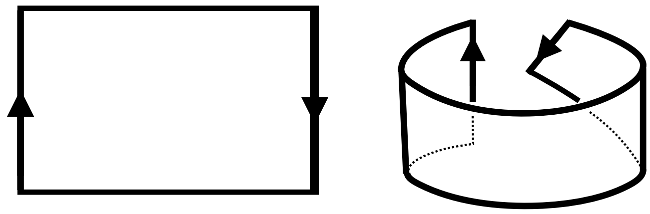
たとえば, 次の図は, 四角形の左辺と右辺を「同じ方向で」接着したものを表します.



筒

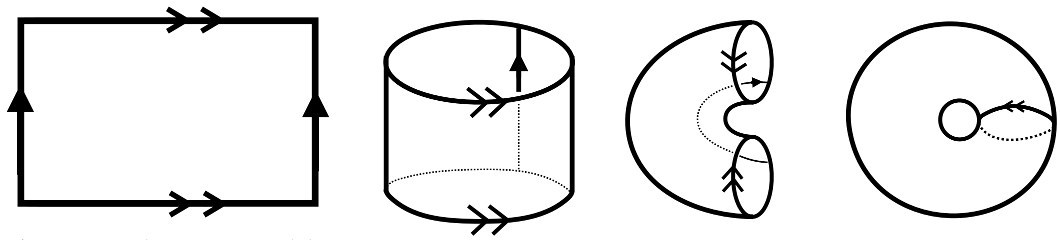
以下の図は, 冒頭のリストのどの 2 次元空間を表しているでしょうか? (ここで, ゴム膜のように伸ばしたり縮めたりして互いに移りあえる図形は, 同一のものとみなすという「トポロジー」の考え方を採用していることは, いうまでもありません.)

i. 左辺と右辺を「逆方向」で接着すると?...



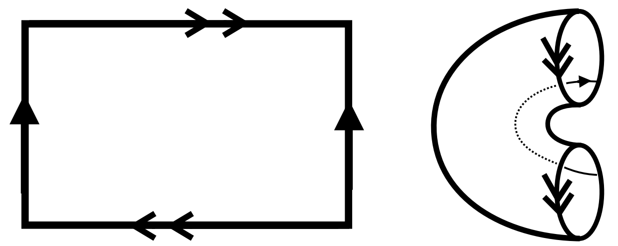
・・・ ?

(参考) 左右だけでなく, 上下も同じ向きで別個に接着すると?...



ドーナツ型

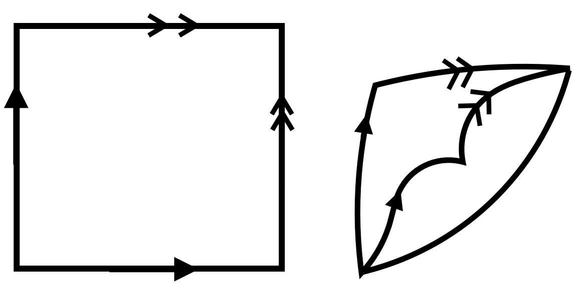
ii. 左右は同じ向き, 上下を逆向きにすると?...



・・・?

(じつはこの 2 次元図形は,
3 次元空間内に
キチンと描けない.)

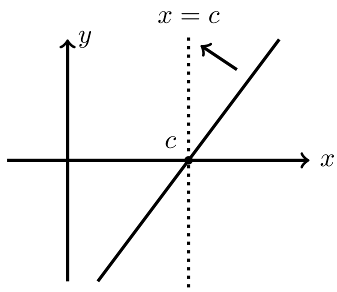
iii. 隣り合った辺を接着することもできます.



・・・ ?

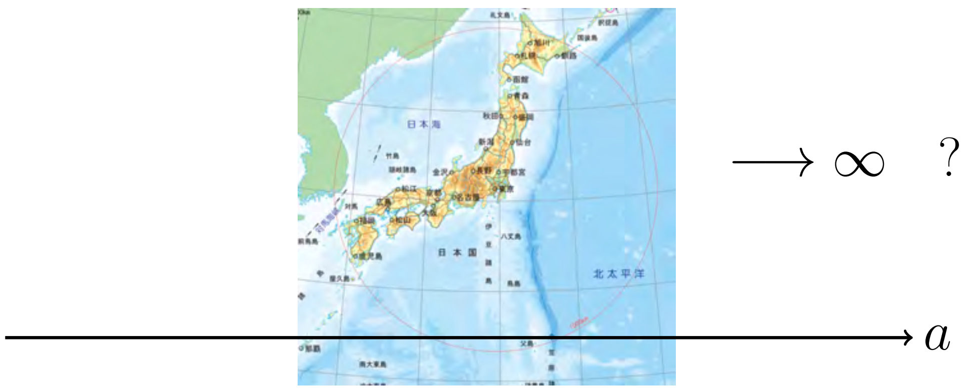
2 傾きを ∞ にする

y 軸に平行な直線は, 傾き a が「無限大」の場合にあたると考えられます. このことは, 直線と x 軸との交わりを固定して, 傾きをふやしていくと, 直線が “$x = c$” に近づいていく (少なくとも, そう思える) ことからもわかるでしょう.



(1)

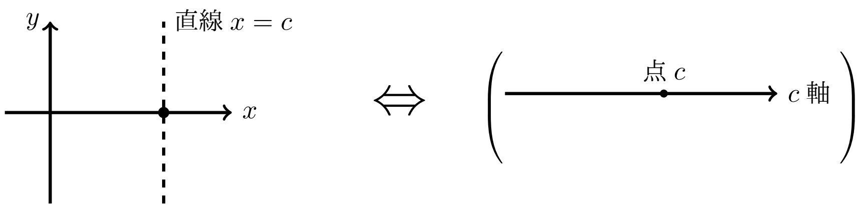
したがって, 垂直な直線を表す「地図」上の点は, ab-平面のはるか右側の無限遠に位置していると考えられます. ab-平面上で a の値を大きくしていった先は、どのようになっているのでしょうか?



(日本からの視点にたとえると, 太平洋のずっと先が「地球の果て」となって大きな滝をなしているのか,
それとも, くるっと回ってシルクロードのうしろに繋がっているのか?)

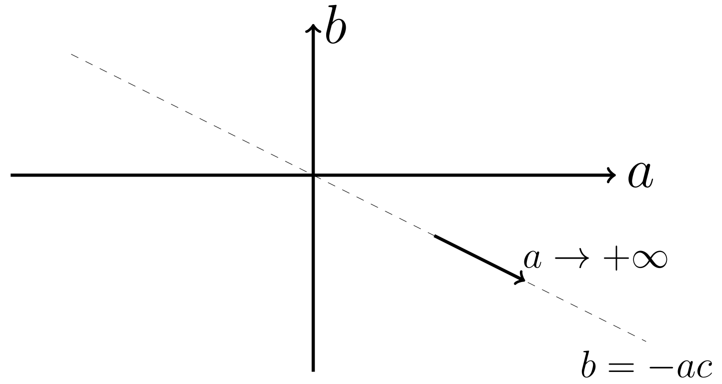
地図: 国土地理院 HP(http://www.gsi.go.jp/chizuhensyu/chizuhensyu41009.html) より

ここで, 垂直な直線 “$x = c$” には, 実数 c を選ぶだけの自由度があります. なので, 垂直な直線だけに興味がある場合, そのような直線は, 通常の数直線の点を指定することで表せることになります.



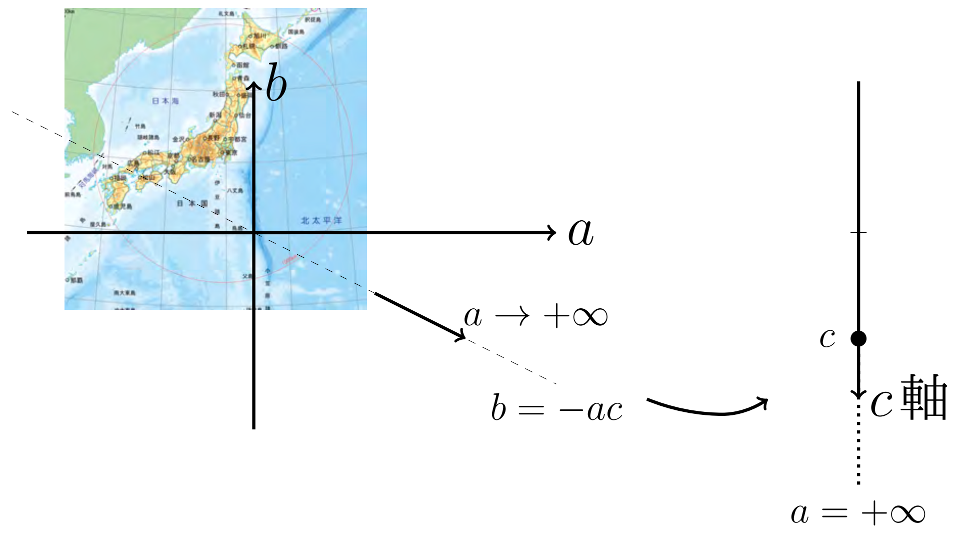
この c-直線が, ab-平面の右側の無限遠に位置していることになります. このことがわかったら, 次は, c-直線と ab-平面の「つながりぐあい」を知る必要があります. そのために, 直線 $y = a(x - c)$ を考えます. この直線は, 傾きが a で, 点 $(c, 0)$ を通る直線です. この状態で c を固定したまま a を無限大に近づけていきましょう (図 (1)).

すると, 直線じたいは, 垂直な直線 “$x = c$” に近づいていきます. いっぽう, 対応する ab-平面上の点 $(a, -ac)$ は, a を $+\infty$ にしていくと, 下の図 (2) のように動きます.



(2)

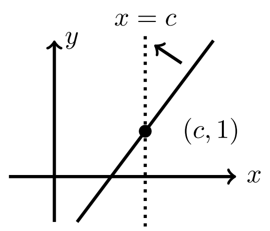
なので, $a = +\infty$ に位置する c-直線は, 正の方向を下に向けて描くのが適当でしょう.



さて, 直線 “$x = c$” は, 図 (1) で, 傾き a を $-\infty$ に飛ばすことでも得られます. [かきこんでみよう!] なので, 私たちの「地図」は, 無限遠のかなたで右側と左側が接着されていることが窺われます. 両端はどのように接着されているのでしょうか.

$a \to -\infty$ とすることは, 前図 (2) で直線 “$b = -ac$” を左に向かって遡(さかのぼ)ることでもあります. したがって, c 軸を地図の左側に描きこむ場合は, 正の方向を上にとると据わりがよいです. [かきこんでみよう!]

■本命クイズ i. 練習として, 次の状況も考えてみましょう. 点 $(c, 1)$ を通る, 傾き a の直線を考えて, $a \to +\infty$ や $a \to -\infty$ とすることでも, 直線 “$x = c$” は得られます. 図 (2) に対応する図はどうなるでしょうか.



ii. 冒頭の Today’s big question への答えは何でしょうか?