数学クイズ

担当: 川崎 菜穂

東北大学大学院理学研究科数学専攻

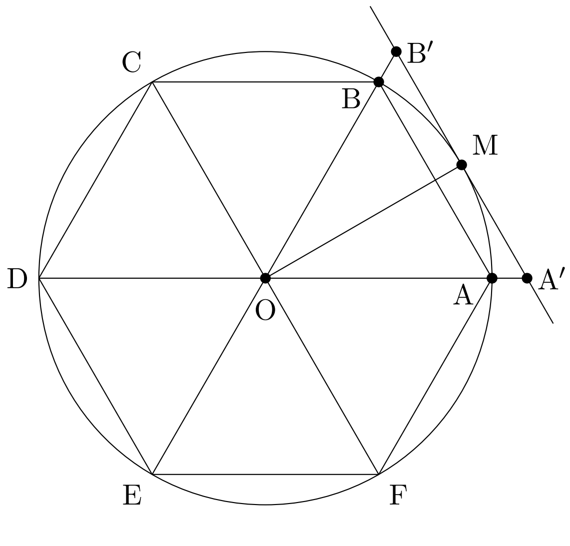
1　円周率 π とは?

円周率は円の周の長さと直径との比率として定義され, いかなる円においても一定の数になります. 学校では $\pi = 3.14$ と習いますが, 小数第三位以下も数字が続きます:

$$\pi = 3.1415926535897\ldots.$$

計算されている桁数は現在でも記録が更新され続けており, 最新の桁数は小数点以下 31 兆 4159 億 2653 万 5897 桁計算されています. これは米 Google が 2019 年 3 月 14 日 [円周率の日] に, 同社のクラウドコンピューティングサービス「Google Cloud」を用いて発表した桁数であり, 円周率の最初の 14 桁である 3.1415926535897 に合わせています.

歴史的背景を振り返ると, 円周率 $\pi = 3.14$ を初めて求めたのがアルキメデス (Archmedes; 前 287-前 212) でした. この説では, アルキメデスが $\pi = 3.14$ を確立した方法を紹介します. 半径 r の円に内接する正六角形 ABCDEF を考えます.



$\triangle$OAB, $\triangle$OBC,..., $\triangle$OEF, $\triangle$OFA は正三角形なので,

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \cdots = \mathrm{EF} = \mathrm{FA} = r$$

です．よって, この正六角形の外周は $6r$ になります．円周の長さ $2\pi r$ に対して, $6r < 2\pi r$ が成り立ち,

$$3 < \pi$$

が得られます．次に今の内接正六角形の外側に外接正六角形 $\mathrm{A'B'C'D'E'F'}$ を考えます．$\mathrm{A'B'}$ の中点を M とすると, $\mathrm{A'B'}$ は M で円 O に接しています．したがって, $\mathrm{OM} = r$, $\angle \mathrm{OMA'} = \angle \mathrm{OMB'} = \dfrac{\pi}{2}$, $\angle \mathrm{A'OM} = \angle \mathrm{B'OM} = \dfrac{\pi}{6}$ になります．これより, $\mathrm{A'M} = r \tan \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{r}{\sqrt{3}}$ となり, $\mathrm{A'B'} = \dfrac{2r}{\sqrt{3}}$ であることがわかります．よって, 外接正六角形の外周は $\dfrac{6 \cdot 2r}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}r$ になります．円周の長さ $2\pi r$ に対して, $2\pi r < 4\sqrt{3}r$ が成り立ち,

$$\pi < 2\sqrt{3}$$

となります．したがって,

$$3 < \pi < 2\sqrt{3} = 3.46410\ldots$$

が得られ, 円周率 π が 3 で始まる数であることがわかりました．

ここでは, 正六角形の各辺の中心角を 2 等分し, 正十二角形に対して考えます．

問題 1 (内接正 12 角形の周と直径の比)**.** AB の中点を N とすると, ON の延長線と円周との交点は M となる．AM の長さ l を r を用いて表せ．

問題 2 (外接正 12 角形の周と直径の比)**.** 問題 1 で, さらに A, M の中点を P とし, OP の延長線と円周との交点を Q とする．Q を通り AM に平行な直線が OA, OM の延長と交わる点を S, T とする．半角の公式

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

を用いて, ST の長さ s を r で表せ．

AM の長さ l を用いると, 内接正十二角形の外周は $12l$ になります．円周の長さ $2\pi r$ に対して, $12l < 2\pi r$ が成り立ち, $\dfrac{6l}{r} < \pi$ になります．また, ST の長さ s を用いると, 外接正十二角形の外周は $12s$ になります．円周の長さ $2\pi r$ に対して, $2\pi r < 12s$ が成り立ち, $\pi < \dfrac{6s}{r}$ になります．したがって, 問題 1, 2 より, $\dfrac{6l}{r} < \pi < \dfrac{6s}{r}$ を計算することができます．これは正六角形の場合より正確なものになります．(興味がある方は計算してみましょう．)

アルキメデスはさらに, 正六角形の各辺の中心角を 2 等分, 2 等分と繰り返して, 九十六角形の場合を計算することで,

$$\frac{223}{71}\ (= 3.140845\cdots) < \pi < \frac{22}{7}\ (= 3.142857\cdots)$$

を得ました．こうして, 円周率 π が 3.14 で始まる数であることが確定しました．

2　円周率 π を表す公式たち

この節では円周率 π を表す公式を 3 つ紹介します．ヨーロッパに限定すると, 初めて見つかった円周率を表す式は, 1593 年のヴィエト（François Viète;1540-1603）による $\sqrt{}$ を使った無限乗積公式でした:

定理 2.1 (ヴィエトの公式)**.**

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} \cdots .$$

問題 3. (1) 半角の公式

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

を用いて, $\cos\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{16}$ を求めよ．

(2) 2 倍角の公式

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

を用いて, 定理 2.1 を示せ．その際,

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

を事実として用いて良い．

ヴィエトの公式の次にヨーロッパで見つかったのは, 1655 年に刊行された著書「無限の算術」で明らかになったウォリス (John Wallis;1616-1703) の公式でした:

定理 2.2 (ウォリスの公式)**.**

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3} \cdot \frac{4\cdot 4}{3\cdot 5} \cdot \frac{6\cdot 6}{5\cdot 7} \cdot \frac{8\cdot 8}{7\cdot 9} \cdots .$$

このウォリスの公式は $\sqrt{}$ を含まない, 自然数だけを使った無限乗積の公式になります．ウォリスがこの結果をブラウンカー (William Brounker;1620-1684) に知らせたところ, 彼は連分数を使って次の式を得ました:

定理 2.3 (ブラウンカーの公式)**.**

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cdots}}}}$$

円周率 π を表す公式は他にもあります．次の節でも紹介しますが, 調べたり, 計算したりして見つけるのもおもしろいかもしれません．

3　円周率 π と逆三角関数

関数 $y=f(x)$ を考えます．$y=f(x)$ を x について解き, $x=g(y)$ となったときの $g(y)$ を $f(x)$ の逆関数と呼びます．例えば, $y=f(x)=2x+1$ を x について解くと, $x=\dfrac{y-1}{2}$ が得られます．すなわち, 関数 $y=f(x)=2x+1$ の逆関数は, $x=\dfrac{y-1}{2}$ になります．$f(x)$ に対して, 逆関数は “元に戻す” 関数になるため, このように書きます.

正弦関数 $y=\sin x$ の逆関数を $x=\mathrm{Arcsin}\, y$ と書きます．この逆関数の右辺を「アークサイン y」と読みます．ここでは, $-\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ に限定します．$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ に対して, 正接関数 $y=\tan x$ の逆関数を $x=\mathrm{Arctan}\, y$ と書きます．この逆関数の右辺を「アークタンジェント y」と読みます.

問題 4. $\mathrm{Arcsin}\, 1$, $\mathrm{Arctan}\, 1$ を求めよ.

実数 x に対して, $\mathrm{Arcsin}\, x$ は次のように級数で表すことができます:

$$\mathrm{Arcsin}\, x = x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots\quad(|x|\leq 1).$$

この式で $x=\dfrac{1}{2}$ とすると, 左辺は $\sin$ をとったときに $\dfrac{1}{2}$ になる角度のことなので, $\dfrac{\pi}{6}$ です. したがって,

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7\cdot 2^7}+\cdots$$

となります．両辺に 6 を掛けて, 各項を小数点 7 位で切り捨てると,

$$\begin{aligned}\pi &= 3+\frac{1}{8}+\frac{9}{640}+\frac{5}{14336}+\cdots\\ &= 3+0.125+0.014062+0.002092+\cdots\\ &= 3.141154\cdots\end{aligned}$$

となり, 円周率 π の近似値が得られます.

実数 x に対して, $\mathrm{Arctan}\, x$ は次のように級数で表すことができます:

$$\mathrm{Arctan}\, x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\cdots\quad(|x|\leq 1).$$

この式で $x=1$ とすると, 左辺は $\tan$ をとったときに 1 になる角度のことなので, $\dfrac{\pi}{4}$ です．したがって,

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots.$$

となります．これは収束が遅いため数値計算には適しませんが, 美しい公式です.

問題 5.

$$\pi=\frac{22}{7}-\int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx$$

を示せ．その際,

$$\int_0^t\frac{1}{1+x^2}dx=\mathrm{Arctan}\, t$$

を用いて良い.

4 円周率 π の無理性

2 つの整数 a, b $(a \neq 0)$ を使って, $\dfrac{b}{a}$ と表せる数を「有理数」とよびます. 例えば, 整数 n は $\dfrac{n}{1}$ と表せるため, 有理数です. また, 0.25 のような有限小数 (小数点以下の桁数が有限の小数) や, $0.333\cdots$ のような循環小数 (同じ数字の列が無限に繰り返される小数) も有理数に含まれます. 一方で, $\dfrac{b}{a}$ と表せない数を「無理数」とよびます. 例えば, $\sqrt{2}$ や $\sqrt{5}$ は無理数です. これらは背理法を用いて証明することができます. 背理法とは, 命題が成り立たないと仮定して矛盾を導くことにより, 元の命題が成り立つことを示す証明方法です.

この節では, π が無理数であることを証明してみましょう.

定理 4.1. 円周率 π は無理数である.

背理法を用いて, 定理 4.1 を証明します. 以下の証明は, 『小平邦彦 編, 新・数学の学び方, 岩波書店 (2015)』に載っている, 1947 年にニヴェン (Ivan Morton Niven;1915-1999) が発表した方法です.

任意の自然数 a と非負整数 n に対して,

$$f_n(x) = \frac{a^n x^n (\pi - x)^n}{n!}$$

とおき,

$$\int_0^{\pi} f_n(x) \sin x dx$$

を考えます.

問題 6. **(1)** 次の二次関数の最大値と最小値を求めよ.

$$y = x(\pi - x) \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

(2) 任意の自然数 a と任意の十分大きい非負整数 n に対して,

$$0 < \int_0^{\pi} f_n(x) \sin x dx < 1$$

となることを示せ. その際, 任意の実数 c に対して,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c^n}{n!} = 0$$

が成り立つことを用いて良い.

次に, π が有理数であると仮定し, 矛盾を導きます.

問題 7. **(1)**

$$f_n(0) = f_n'(0) = f_n''(0) = \cdots = f_n^{(n-1)}(0) = 0$$

が成り立つことを示せ.

(2)

$$f_n^{(n+k)}(0) = \frac{1}{n!}(-1)^k {}_nC_k a^k \pi^{n-k}(n+k)!$$

が成り立つことを示せ.

(3) 部分積分の公式

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

を用いて,

$$\int_0^\pi f_n(x)\sin x dx = 2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f_n^{(2k)}(0)$$

が成り立つことを示せ.

(4) π が有理数であると仮定する. このとき, 適切に a をとると,

$$\int_0^\pi f_n(x)\sin x dx$$

が整数になることを示せ.

問題 6 と問題 4.2(4) より, 矛盾します. すなわち, 問題 4.2(4) で仮定した「π が有理数である」という仮定が誤っていることがわかります. 以上より, π は無理数であり, 定理 4.1 を証明することができました.

π の無理性の証明はこの他にも知られています. また, 次の節に登場する π^2 も無理数であることが知られています.

定理 4.2. π^2 は無理数である.

証明はここでは省略しますが, π の他の証明も含め, 調べてみるのもおもしろいかもしれません.

5　円周率 π と確率

2 つの整数の最大公約数が 1 であるとき，「互いに素」と言います．例えば, 3 と 5 の最大公約数は 1 なので, 3 と 5 は互いに素になります.

定理 5.1. 1 以上の整数の中から 2 つランダムに選ぶ (同じ整数を二つ選んでも良い) とき, その 2 つの数が互いに素になる確率は $\dfrac{6}{\pi^2}$ になる.

問題 8. 次の補題を用いて, 定理 5.1 を示せ.

補題 5.2.

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

メンゴリ (Pietro Mengoli;1625-1686) は 1644 年, 平方数の逆数和 (補題 5.2 の右辺) はいくつかという問題を出しました．この問題はバーゼル問題と呼ばれており, オイラー (Leonhard Euler;1707-1783) によって解決されました．バーゼルはオイラーの故郷であり, この問題を解くことができなかった兄弟ヤコブ・ベルヌーイ（Jakob Bernoulli;1654-1705）とヨハン・ベルヌーイ（Johann Bernoulli;1667-1748）の故郷でもあります.

オイラーはさらに,

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^4}{90} &= 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots \\
\frac{\pi^6}{945} &= 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \cdots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

を求めることにも成功したのでした.

リーマン (Georg Friedrich Bernhard Riemann; 1826-1866) は, オイラーのアイデアを取り入れることにより, ゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

を定義しました．この関数は, $s > 1$ を満たす実数に対して収束します．オイラーの結果より,

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \cdots$$

であることがわかります.

前の節で π や π^2 の無理性について言及しましたが, 正の偶数 $2k$ に対する $\zeta(2k)$ も無理数であることが知られています．一方で, s が 3 以上の正の奇数の場合については, 1978 年にアペリ (Roger Apéry; 1916-1994) によって, $\zeta(3)$ が無理数であることが証明されています．5 以上の正の奇数の場合については, 個々が無理数であるかどうかはわかっていません．小さい数については, 2001 年にズヂリン (Wadim Zudilin;1969-) によって, $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ の少なくとも一つが無理数であることが証明されています．$\zeta(5)$ の無理性の証明に挑むのもおもしろいかもしれません.