数学クイズ 解答例

担当: 川崎 菜穂

東北大学大学院理学研究科数学専攻

問題 1 (内接正 12 角形の周と直径の比)**.** AB の中点を N とすると, ON の延長線と円周との交点は M となる. AM の長さ l を r を用いて表せ.

解答例. AB は円 O に内接する正六角形の一辺なので, $\triangle\mathrm{OAB}$ は正三角形である. $\angle\mathrm{AOM} = \angle\mathrm{AON} = \dfrac{\pi}{6}$ より,

$$\mathrm{AN} = r\sin\frac{\pi}{6} = \frac{r}{2}, \quad \mathrm{ON} = r\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}r$$

となり, $\mathrm{MN} = r - \dfrac{\sqrt{3}}{2}r$ が得られる. したがって,

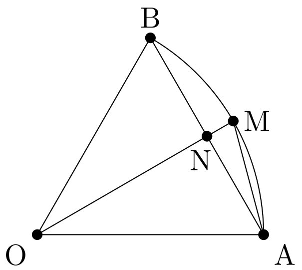
$$\mathrm{AM}^2 = \mathrm{AN}^2 + \mathrm{MN}^2 = \frac{r^2}{4} + \frac{7-4\sqrt{3}}{4}r^2 = \frac{4-2\sqrt{3}}{2}r^2 = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}r^2$$

より,

$$l = \mathrm{AM} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}r = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}r$$

を得る.

(答) $l = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}r$



∎

問題 2 (外接正 12 角形の周と直径の比)**.** 問題 1 で, さらに A, M の中点を P とし, OP の延長線と円周との交点を Q とする. Q を通り AM に平行な直線が OA, OM の延長と交わる点を S, T とする. 半角の公式

$$\tan\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}} \quad \left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$$

を用いて, ST の長さ s を r で表せ.

解答例. $\angle \mathrm{SOQ} = \dfrac{\pi}{12}$ より,

$$s = 2\mathrm{SQ} = 2r\tan\frac{\pi}{12}$$

である.

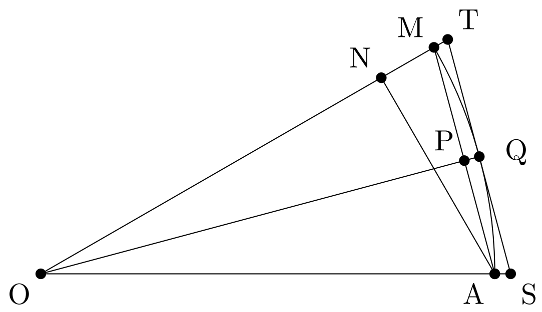
$$1 \pm \cos 2\theta = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$$

より, 半角の公式を用いると,

$$\tan\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = (2-\sqrt{3})$$

である. したがって, $s = 2(2-\sqrt{3})r$ を得る.

(答) $s = 2(2-\sqrt{3})r$



∎

問題 3. **(1)** 半角の公式

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \quad \left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$$

を用いて, $\cos\dfrac{\pi}{4}$, $\cos\dfrac{\pi}{8}$, $\cos\dfrac{\pi}{16}$ を求めよ.

(2) 2 倍角の公式

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

を用いて, 定理 2.1 を示せ. その際,

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

を事実として用いて良い.

(1) の解答例. $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である. 半角の公式

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

より,

$$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

が得られる.

$$\text{(答)}\ \cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\ \cos\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

∎

(2) の証明. 2 倍角の公式

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

を繰り返し使うことにより,

$$\begin{aligned}
1 &= \sin\frac{\pi}{2} = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\\
&= 2^2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{4}\\
&= \cdots\\
&= 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}\cos\frac{\pi}{2^n}\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}\cdots\cos\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

となる. この式より,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}} &= \cos\frac{\pi}{2^n}\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}\cdots\cos\frac{\pi}{4}\\
\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\frac{\pi}{2^n}}{\sin\frac{\pi}{2^n}} &= \cos\frac{\pi}{2^n}\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}\cdots\cos\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

を得る. (1) より,

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad ,\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2},\ldots$$

が得られる. ここで, $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ より,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\frac{\pi}{2^n}}{\sin\frac{\pi}{2^n}}\right)=\frac{2}{\pi}$$

である. これを書き直せば定理を得る. ∎

問題 4. Arcsin 1, Arctan 1 を求めよ.

解答例. $x=\mathrm{Arcsin}\,1$ とおくと, $1=\sin x$ となる. $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ より, $x=\dfrac{\pi}{2}$ を得る.

(答) $x = \dfrac{\pi}{2}$

$x = \mathrm{Arctan}\,1$ とおくと, $1 = \tan x$ となる. $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ より, $x = \dfrac{\pi}{4}$ を得る.

(答) $x = \dfrac{\pi}{4}$

∎

問題 5.

$$\pi = \frac{22}{7} - \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx$$

を示せ. その際,

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^2}dx = \mathrm{Arctan}\,t$$

を用いて良い.

証明.

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx = \frac{22}{7} - \pi$$

を示せばよい. $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{1+x^2}dx = \mathrm{Arctan}\,t$ より,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx &= \int_0^1 \left(x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - 4\frac{1}{1+x^2}\right)dx \\ &= \frac{1}{7} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{3} + 4 - 4\mathrm{Arctan}\,1 \\ &= \frac{22}{7} - \pi\end{aligned}$$

を得る. ∎

問題 6. **(1)** 次の二次関数の最大値と最小値を求めよ.

$$y = x(\pi - x) \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

(2) 任意の自然数 a と任意の十分大きい非負整数 n に対して,

$$0 < \int_0^\pi f_n(x)\sin x dx < 1$$

となることを示せ. その際, 任意の実数 c に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0$$

が成り立つことを用いて良い.

(1) の解答. $y = x(\pi - x)$ より,

$$y = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{4}$$

となる. したがって, $x = \dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{\pi^2}{4}$, $x = 0$ のとき最小値 0 を得る.

(答) $x = \dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{\pi^2}{4}$, $x = 0$ のとき最小値 0

∎

(2) の証明. 二次関数 $y = x(\pi - x)$ の最大値は $\dfrac{\pi^2}{4}$ であるから,

$$0 < f_n(x) = \frac{a^n}{n!}\{x(\pi - x)\}^n < \frac{a^n}{n!}\left(\frac{\pi^2}{4}\right)^n = \frac{1}{n!}\left(\frac{a\pi^2}{4}\right)^n$$

である. また, $0 \leq x \leq \pi$ のとき, $0 \leq \sin x \leq 1$ であるから,

$$0 < f(x)\sin x < \frac{1}{n!}\left(\frac{a\pi^2}{4}\right)^n$$

となる. 各々を 0 から π まで積分し,

$$0 < \int_0^\pi f(x)\sin x dx < \frac{\pi}{n!}\left(\frac{a\pi^2}{4}\right)^n$$

となる. ここで, 任意の実数 c に対して,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c^n}{n!} = 0$$

が成り立つことから, n が十分大きい大きいとき, $\dfrac{\pi}{n!}\left(\dfrac{a\pi^2}{4}\right)^n$ は 1 より小さい正の数になることがわかる. したがって, 十分大きい任意の n に対して,

$$0 < \int_0^\pi f(x)\sin x dx < \frac{\pi}{n!}\left(\frac{a\pi^2}{4}\right)^n < 1$$

を得る.

∎

問題 7. (1)

$$f_n(0) = f_n'(0) = f_n''(0) = \cdots = f_n^{(n-1)}(0) = 0 \qquad \text{(a)}$$

が成り立つことを示せ.

(2)

$$f_n^{(n+k)}(0) = \frac{1}{n!}(-1)^k {}_nC_k a^k \pi^{n-k}(n+k)! \qquad \text{(b)}$$

が成り立つことを示せ.

(3)

$$\int_0^\pi f_n(x)\sin x dx = 2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f_n^{(2k)}(0) \tag{c}$$

が成り立つことを示せ.

(4) π が有理数であると仮定する. このとき, 適切に a をとると,

$$\int_0^\pi f_n(x)\sin x dx$$

が整数になることを示せ.

(1) の証明. $f_n(x)$ の定義式の右辺を二項定理で展開すると,

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k {}_nC_k a^k \pi^{n-k} x^{n+k} \tag{d}$$

である. $f_n(x)$ は x について n 次の項から始まるため,

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0 \tag{e}$$

を得る. ∎

(2) の証明. 式 (d) の両辺を $n+k$ 回 $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ 微分すると,

$$f_n^{(n+k)}(x) = \frac{1}{n!}(-1)^k {}_nC_k a^k \pi^{n-k}(n+k)! + g(x)$$

となる. ただし, $g(x)$ は定数項が 0 の多項式とする. したがって,

$$f_n^{(n+k)}(0) = \frac{1}{n!}(-1)^k {}_nC_k a^k \pi^{n-k}(n+k)!$$

となる. ∎

(3) の証明. 部分積分を 2 回行うと,

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi f_n(x)\sin x dx &= \int_0^\pi f_n(x)(-\cos x)' dx \\
&= [f_n(x)(-\cos x)]_0^\pi - \int_0^\pi f_n(x)(-\cos x)' dx \\
&= f_n(\pi) - f_n(0) + \int_0^\pi f_n'(x)\cos x dx \\
&= f_n(\pi) - f_n(0) + \int_0^\pi f_n'(x)(\sin x)' dx \\
&= f_n(\pi) - f_n(0) + \left[f_n'(x)\sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi f_n''(x)\sin x dx
\end{aligned}$$

となる．これを $n+1$ 回繰り返す．$f(x)$ は x についての $2n$ 次式であるから，$f^{(2n+2)}(x)=0$ となることに注意すると，

$$\int_0^\pi f_n(x)\sin x dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(f_n^{(2k)}(\pi)-f_n^{(2k)}(0)\right)$$

となる．$f_n(\pi-x)=f_n(x)$ より，$f_n^{(k)}(\pi)=(-1)^k f_n^{(k)}(0)$ であるから，

$$\int_0^\pi f_n(x)\sin x dx = 2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f_n^{(2k)}(0)$$

を得る． ∎

(4) の証明. π が有理数であると仮定する．ある自然数 a, b に対して，$\pi=\dfrac{b}{a}$ とおく．$f_n(x)$ の定義式の a は任意であるから，π の分母 a と同じものと考えて問題ない．このとき，

$$a^n\pi^{n-k}=a^n\frac{b^{n-k}}{a^{n-k}}=a^k b^{n-k}$$

より，式 (b) の右辺は整数となる．式 (c) の右辺について $2k<n$ となる項の値は式 (e) より 0 である．また，$2k\geq n$ の項に対しては整数であるから，

$$\int_0^\pi f_n(x)\sin x dx$$

が整数であることが示された． ∎

問題 8. 次の補題を用いて，定理 5.1 を示せ．

証明. a と b が互いに素とは，任意の素数 p に対して，a と b の少なくとも一方が p の倍数でないことと言い換えることができる．p を固定したとき，この事象は，a, b がともに p の倍数である事象の余事象である．1 以上の整数は p で割り切れる数，p で割って 1 余る数，p で割って 2 余る数,... p で割って 1 余る数に場合分けすることができる．このことから，任意に選んだ a が p の倍数である確率は $\dfrac{1}{p}$ であり，b についても同様である．各 p に対して，これらの試行は独立であるため，求める確率を P とおくと，

$$P=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\cdots$$

となる．両辺の逆数をとると，素因数分解の一意性より，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{P} &= \frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5^2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{7^2}}\cdots \\
&= \left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{(2^2)^2}+\frac{1}{(2^2)^3}+\cdots\right)\times\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{(3^2)^2}+\frac{1}{(3^2)^3}+\cdots\right) \\
&\quad\times\left(1+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{(5^2)^2}+\frac{1}{(5^2)^3}+\cdots\right)\times\left(1+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{(7^2)^2}+\frac{1}{(7^2)^3}+\cdots\right)\times\cdots \\
&= 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

となる. ここで, 補題 5.2 より, $\dfrac{1}{P} = \dfrac{\pi^2}{6}$ を得る. ∎

参考文献

[1] 小平邦彦 編, 新・数学の学び方, 岩波書店 (2015).

[2] 中村滋, 数学のかんどころ 円周率–歴史と数理–, 共立出版 (2013).