積み木の積み上げと調和級数

東北大学大学院理学研究科数学専攻修士 1 年
守谷龍之介 蛭田凌輔

2015/07/29,30

概要 今回考える問題は、ただ積み木を積み上げるだけではなく、積み木を少しずつずらしながら積んでいくという作業です。さらに言えば、そのズレを出来るだけ大きくするというのが目標です。
いったいどのようにして乗せるのが最も効率的なのか。その効率的な乗せ方をするとはたして積み木はどこまでズラして乗せていくことが可能なのでしょうか。

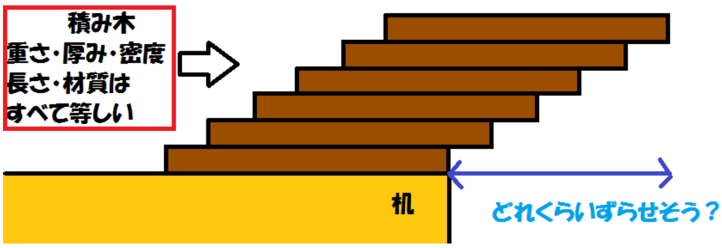
1 実験のルールと結果の予想

1.1 積み木を置く際のルール

ここでは積み木を置くルールとズレの意味合いを定めます。

ルール

- 積み木１つの長さは２であるとする。
- 積み木はすべて、重さ・厚み・密度・材質が等しいものとする。
- 積み木の重心は、積み木のちょうど真ん中にあるものとする。
- 積み木の数に制限はないものとする。
- 一番下の積み木は、積み木の右端が机の右端と一致するように置く。
- ズレとは一番上の積み木の右端と机の右端との（左右の意味での）距離を表すものとする。



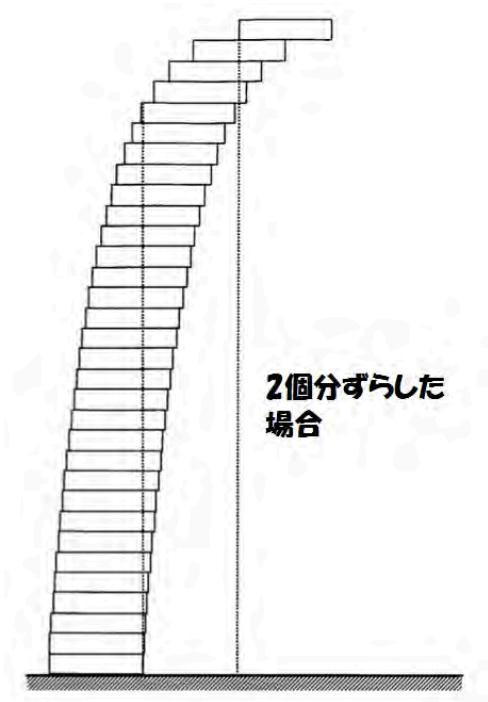
1.2 積み木はどれくらいずらせそう？

ここではまず次の問題の解答を予想をしてみましょう。

1. 出来るだけ少ない積み木でズレを大きくするには、どのような置き方をしたらよいだろうか。
2. 積み木をいくらでも積んでいいとすれば、どれくらいまでズラすことが出来るだろうか。

2 ズラし方の最大値

積み木の数に制限が無ければ、はたしてどれくらい積むことが出来るでしょうか $\cdots$



前問に対する答えが次のような置き方になります。

最適な置き方

積み木が $n+1$ 個の場合、上から順番に

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}$$

とズラすのが最適であり、その全体でのズレは

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

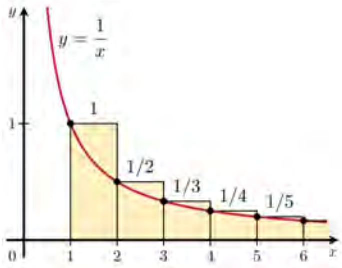
と書ける。

では、この置き方をするとはたしてどれくらいの長さだけずらすことが出来るのでしょうか。

3　調和級数とその評価

実はこの $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ には名前がついていて、調和級数という名前がついています。
さらにこの調和級数は次のような評価が出来ることが分かっています。(下図の長方形の面積は $y=\frac{1}{x}$ の下側の面積より大きい)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \geq \log(n+1)$$



右辺は n を大きくすればいくらでも大きくなるので、左辺もいくらでも大きくすることが出来ます。すなわち、

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ は n を大きくすることで、いくらでも大きくできる

これらをまとめると次のような結論が得られます。

最適解と結論

積み木が $n+1$ 個の場合、上から順番に

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n}$$

とズラすのが最適なズラしかたであり、その全体でのズレは

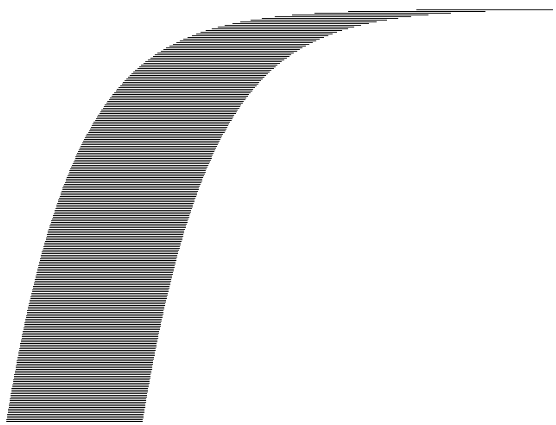
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

となる。
さらに積み木が十分多くの量があればこのズレはいくらでも大きくすることが出来る。

実際にこの方法で積み木を積めばいくらでもずらすことが可能です。ぜひチャレンジしてみてください。
最後までお読みいただきありがとうございました。
このポスターの内容をもう少し詳しく説明したものを配布していますので、興味のある方はぜひとも手に取ってみてください。

東北大学大学院理学研究科数学専攻修士 1 年
守谷龍之介 蛭田凌輔

積み木がそれぞれ 30,15,10 枚の図



積み木を 52 枚積んだ時のシミュレーション

参考文献

[1] 積み木はどこまでずらすことが可能か　石川県立七尾高等学校　金岡利宏
http://w3e.kanazawa-it.ac.jp/e-scimath/contents/t07/textbook_t07_all.pdf

[2] 数学セミナー、日本評論社、2010 年 6 月号　パズル・ゲームに見る悪魔の証明、松井知己

[3] Wikipedia　調和級数