積み木の積み上げと調和級数

東北大学大学院理学研究科数学専攻１年
守谷龍之介 蛭田凌輔

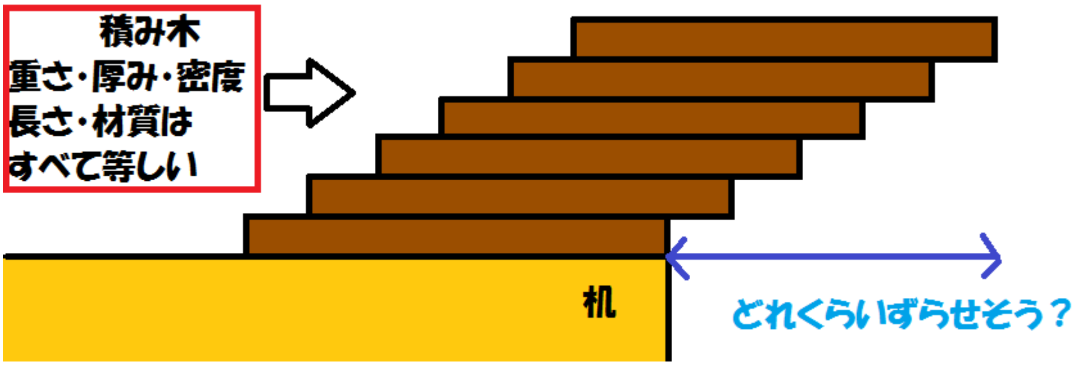
2015/07/29,30

1　実験の内容

積み木を積み上げていくという動作は、単純なようで奥が深いものです。適当に積んでいけばよいかといえばそんなことはなく、うまくバランスを取りながら積んでいかないと崩れてしまいます。分かりやすい例だとジェンガなどが挙げられます。

今回考える問題は、ただ積み木を積み上げるだけではなく、その積み木を少しずつずらしながら積んでいくという作業です。さらに言えば、そのズレを出来るだけ大きくするというのが目標です。具体的には下の図のような感じで、少しずつ積み木をずらして乗せていくという感じです。
だからと言って適当に大きくずらして乗せていってしまうとすぐに崩れてしまいますし、少しずつずらして乗せていったのではあまり効率的とは言えません。

ではいったいどのようにして乗せるのが最も効率的なのか。その効率的な乗せ方をすると果たして積み木はどこまでズラして乗せていくことが可能なのか。このポスター発表ではこの点について説明をします。



2　実験のルールと結果の予想

2.1　積み木を置く際のルール

まずはどのような積み木をどのようにして置いていくかというのを決めます。

積み木は前図の通り、重さ・厚み・密度・長さ・材質はすべて等しいものとし、重心は積み木のちょうど真ん中にあるものとします。
積み木の長さは 2 で厚みは今回は 0.1 としておきます。単位は cm でも m でもなんでもいいのですが、長さが 2 だと実は後でわかりやすいのでとりあえずはこのような設定の下で考えます。
また、この積み木はいくらでも存在するものとして、足りなくなったから終わりということも考えないことにします。

次は積み木の置き方についてです。
一番下の積み木は、積み木の右端が机の右端と一致するように置きます。すなわち一番下の積み木が机からはみ出したりするようなことは無いものとします。
そして下から 2 段目以降の積み木に関しては、あくまでも右にずらすことだけを考えるので手前や奥にずらしたりすることは無いものとして考えます。
このようにして積み重ねていった結果がまさに前図のようになるというわけです。

またどれくらいずらせるかというのは
一番上の積み木の右端と机の右端との（左右の意味での）距離
をズレとして計算することにします。

2.2　積み木はどれくらいずらせそう？

では、実際どれくらいずらせるのでしょうか。またどのように置くことで最も遠くまでずらすことが出来るのでしょうか。
ここではまず次の問題の解答を予想をしてみましょう。

(a) 出来るだけ少ない積み木でズレを大きくするには、どのような置き方をしたらよいだろう。

(b) 積み木をいくらでも積んでいいとすれば、どれくらいまでずらすことが出来るだろう。

直感的には答えはどんな感じになりそうでしょうか。
等間隔に積んでいくのがよさそうでしょうか、それともだんだん幅を狭くしていくのがいいでしょうか。
いくらでも積んでいいとはいえ、やはりずれていけばずれていくほどバランスが保てなくなっていくのでどこかで限界を迎えるのでしょうか。またその限界とはどの辺りなのでしょうか。
これからこれらの答えとその答えについての検証や簡単な説明を行っていきます。

3　条件を数式化してより厳密に

　ここでは、先ほどの積み木を置く際のルールを数学の問題として見るために、検証すべき内容を数式で表すことにします。
（なおこのセクションの内容はやや難しいので、数式よりも事実を知りたいという場合は次の4章、もしくは4.2に進んでも構いません）

まずは考えるべき問題です。問題は次の通りです。

問題

$n+1$ 個の積み木があるとき、一番上の積み木は机の左端から最大どこまで離すことが出来るか。

次に積み木を置く上でのルールを数式化していきます。
積み木は $n+1$ 個あるとし、上から順番に1個目、2個目、…、$n+1$ 個目の積み木と呼ぶ。また積み木の長さは2とします。
$n+1$ 個目の積み木は右端を机の右端につけて置く。机の面と平行に数直線を取り x 軸と名付け、机の右端が1になるように、原点を机の右端から左に距離1のところにとります。（下図参照）
i 枚目の板の重心の x 座標を x_i と書く。それにより明らかに $x_{n+1}=0$ となります。
上から1,…,k 個目までの積み木を1つの物体として考えたときの重心の x 座標を $\overline{x_k}$ とすると

$$\overline{x_k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$$

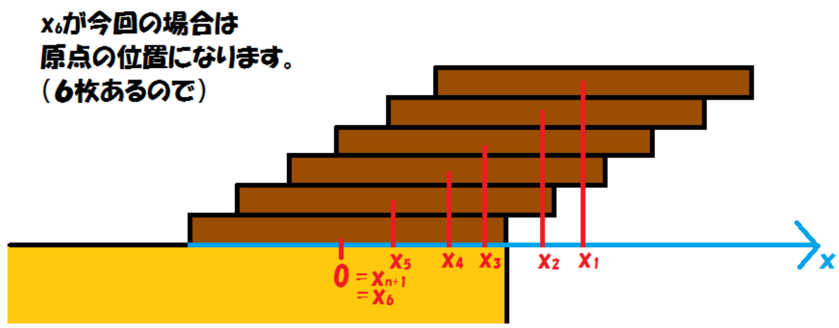
この値が $k+1$ 個目の積み木の右端より左側に位置しなければ積み木は崩れてしまう。すなわち上記と合わせて、問題を次のように言い換えることが出来る。

数式化した問題

$n+1$ 個の実数 $(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$ が、

$$\begin{cases} \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i \leq x_{k+1} + 1 \qquad (k = 1, 2, \cdots, n) & (3.1) \\ x_{n+1} = 0 & (3.2) \end{cases}$$

を満たす時、x_1 の最大値はいくつか。



4　問題に対する解答とその検証

4.1　実際に計算をしてみる

さて、問題の答えを考えていきましょう。
いきなり n 個と言っても考えづらいので、とりあえず 2 個、3 個、4 個と少ない数で考えていきましょう。またここではモーメントの考え方を用いて、積み木が崩れないかどうかを考察します。

- 積み木が 2 個の場合
  積み木が 2 個の場合、上の積み木の重心が、下の積み木の右端にあるのが限界となります。
  すなわち $x_1 = 1$ となり、ズレは 1 となります。

- 積み木が 3 個の場合
  積み木が 3 個の場合、上の積み木 2 個分の重心が、一番下の積み木の右端にあるのが限界となります。
  2 個の場合には 1 だけずらせることが分かっていたので、上から 2 個目と 3 個目のズレを p_2 とし、積み木の重さを m とすると、次の等式が成り立ちます。

  $$m \times (1 - p_2) = m \times p_2$$

  よって $p_2 = \dfrac{1}{2}$ となるので全体的なズレは $1 + \dfrac{1}{2}$ となります。

- 積み木が 4 個の場合
  3 個の場合と同様に考えていきます。上の積み木 3 個分の重心が、一番下の積み木の右端にあるのが限界となります。
  上から 3 個目と 4 個目のズレを p_3 とすると、次の等式が成り立ちます。

  $$m \times (1 - p_3) = 2m \times p_3$$

  よって $p_3 = \dfrac{1}{3}$ となるので全体的なズレは $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}$ となります。

  察しの良い方はこの辺で気付くと思いますが、実は、最適なずらしかたは上から順番に

  $$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$$

  とする詰み方が最適となります。実際 n 個の場合も同様であり

- 積み木が n 個の場合
  n - 1 個分の重心が、一番下の積み木の右端にあるのが限界なので、上から n - 1 個目と n 個目のズレを p_n とすると、次の等式が成り立ちます。

  $$m \times (1 - p_n) = (n - 1)m \times p_n$$

  よって $p_n = \dfrac{1}{n}$ となるので全体的なズレは

  $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

  となります。

4.2 検証からわかった事実

以上より次のことが分かりました。

最適な置き方

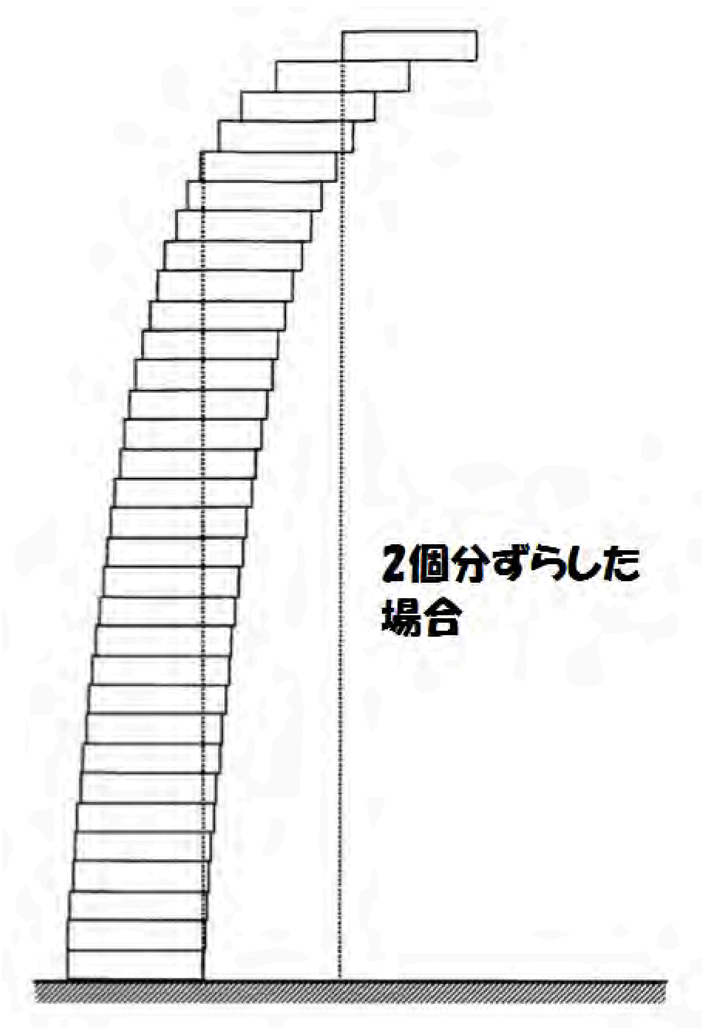
積み木が $n+1$ 個の場合、上から順番に

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}$$

とズラすのが最適であり、その全体でのズレは

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

と書ける。



5　調和級数とその評価、そして極限へ

はたして前述のような置き方が、本当に最適な置き方なのか。
今回はその点については言及しないで話を進めることにします。(実際この置き方が最適であるという事実は正しいです。)

では、この置き方をするとはたしてどれくらいの長さだけずらすことが出来るのでしょうか。すなわちこれは次のような問題に帰着されます。

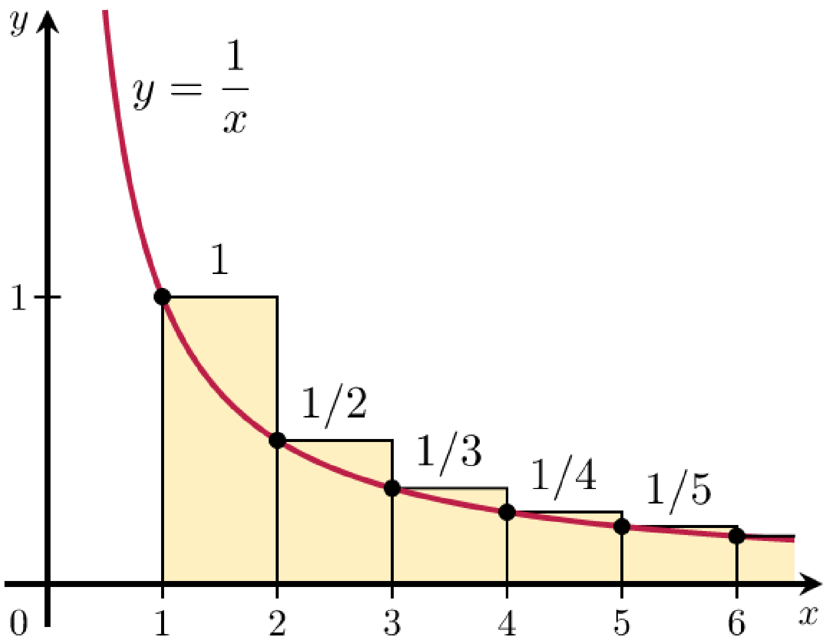
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ という値は n が十分大きければどれくらいの大きさになるのか

5.1　調和級数とその評価

実はこの $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ には名前がついていて、**調和級数**という名前がついています。
さらにこの**調和級数**は次のような評価が出来ることが分かっています。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \quad \geq \quad \log(n+1)$$

この評価は積分の結果によって正当化されます。数 3 で $\dfrac{1}{x}$ の不定積分が $\log x + C$ であることを習っている方であれば後に載せた図と合わせて確認できると思います。
(ここの内容もやや複雑なので、結果を知りたい!という方はこの評価が出来るということだけを抑えてもらって 5.2 に進んでもらって構いません。)



図において、各n番目の項に対応する長方形は、単位長さ1の幅と単位長さの$\frac{1}{n}$の高さを持つものとすれば、これらの長方形の面積の合計は**調和級数**

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

となり、仮にn番目までの長方形を足すとすればこの値は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

と書き表すことが出来ます。

一方、曲線$y=\frac{1}{x}$の積分範囲は1から$n+1$ということになるので

$$\int_{1}^{n+1}\frac{1}{x}dx=\log(n+1)$$

図からもわかる通り、長方形の総和は明らかに曲線$y=\frac{1}{x}$の積分1から$n+1$での積分結果を上回っているので

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geq\log(n+1)$$

となり前述の評価式が得られました。

5.2 調和級数の極限

そしていよいよこの章の最初に提示した問題の解答に迫ります。
調和級数の極限を求めるうえで、このままnを十分大きくしても値がある値に近づいていくのかそれとも発散するのか少しわかりづらいです。
そこで先ほどの評価式を使います。前述の評価から

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geq\log(n+1)$$

が任意のnで言えているので右辺のnを十分大きくしたときのことを考えてみます。

$$\lim_{n\to\infty}\log n=\infty$$

であることを考えれば左辺はそれよりもさらに大きいことから（追い出しの原理とも呼ばれています）

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\infty$$

となるので**調和級数**は発散することがわかります。

6　まとめと驚くべき事実

前章により**調和級数**は発散することがわかりました。これはすなわちどういうことを意味しているかというと

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ という値は } n \text{ を大きくすることで、いくらでも大きくできる}$$

ということになります。すなわち積み木の問題に立ち返ってこれらの事実をすべてまとめると以下のようになります。

最適な置き方とその結果発生するズレに関する驚くべき事実

積み木が $n+1$ 個の場合、上から順番に

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}$$

とズラすのが最適なずらしかたであり、その全体でのズレは

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

となる。
さらに積み木が十分多くの量があれば**このズレはいくらでも大きくすることが出来る。**

どうでしょう。一番最初にした予想と実際の結果には差はあったでしょうか。
ズレはいくらでも大きくできるというと少し信じられないかもしれないですが、それは

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

が n を十分大きくしたときに発散するというのが感覚的には掴みづらいところに起因しているのです。
展示してある積み木を用いてぜひともチャレンジしてみてください。
最後までお読みいただきありがとうございました。

参考文献

[1] 積み木はどこまでずらすことが可能か　石川県立七尾高等学校　金岡利宏
http://w3e.kanazawa-it.ac.jp/e-scimath/contents/t07/textbook_t07_all.pdf

[2] 数学セミナー、日本評論社、2010 年 6 月号　パズル・ゲームに見る悪魔の証明、松井知己

[3] Wikipedia　調和級数
https://ja.wikipedia.org/wiki/%E8%AA%BF%E5%92%8C%E7%B4%9A%E6%95%B0