

令和7年度
東北大学理学部編入学試験 問題
(数学科)

公表期限：2028年3月末

東北大学理学部

※以下の(1)、(2)の場合を除き、複製、転載、転用することを禁じます。

- (1) 受験予定者が自主学習のために使用する場合
- (2) 学校その他の教育機関（営利目的で設置されているものを除く。）の教職員が教育の一環として使用する場合

令和 7 年度 東北大学理学部数学科 編入学試験問題

数学

令和 6 年 9 月 6 日 (9 時 30 分から 12 時 30 分まで)

注意事項

- 1) 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと。
- 2) 問題は 4 題ある。全問に解答すること。
- 3) 解答は各問題ごとに指定された解答用紙を用いること。
- 4) 受験番号をすべての解答用紙の () 内に記入すること。また、氏名は書かないこと。
- 5) 問題冊子は、このページを含め全 3 ページである。

 \mathbb{R} : 実数全体のなす集合

1 実数 t に対して, 3 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} -1-t & 3 & 1 \\ 0 & 2-t & -1 \\ -2 & 2 & 3-t \end{pmatrix}$$

と定める. A が逆行列を持つための必要十分条件を t を用いて表せ. また, その必要十分条件が満たされている場合に, A の逆行列を t を用いて表せ.

2 N を 1 以上の整数とする. 1 以上の整数 m, n について, m 個の \mathbb{R}^N のベクトルたち

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$$

と n 個の \mathbb{R}^N のベクトルたち

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$$

が与えられ, 次の二つの条件 (i), (ii) が成り立つものとする.

- (i) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ は 1 次独立である.
- (ii) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ が生成する部分空間は $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ が生成する部分空間と一致する.

以下の問いに答えよ.

(1) ある $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ が存在して, 次の条件 (*) が成り立つことを示せ.

(*) $\mathbf{b}_i, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ は 1 次独立である.

(2) \mathbf{b}_i が (1) の条件 (*) をみたすとき, $\mathbf{b}_i, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ が生成する部分空間と $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ が生成する部分空間は一致することを示せ.

3 2変数関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$$

と定める.

- (1) 開円板 $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ における f の極値を求めよ.
- (2) 条件 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ のもとでの f の極値を求めよ.
- (3) 閉円板 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ における f の最大値と最小値を求めよ.

4 f を 2 回連続微分可能関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ で, $f''(x) \geq 0$ ($x \in \mathbb{R}$) をみたすものとする. 以下の問いに答えよ.

- (1) ある点 $x_0 \in \mathbb{R}$ が存在して $f'(x_0) > 0$ をみたすならば,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

が成り立つことを示せ.

- (2) ある定数 $C > 0$ が存在して $|f(x)| \leq C$ ($x \in \mathbb{R}$) をみたすならば, f は定数関数であることを示せ.
- (3) 実数 a, b, c は $a < b$ および $c > 0$ をみたすとする. 実数 K を

$$K = \sup_{a-c \leq x \leq b+c} f(x) - \inf_{a-c \leq x \leq b+c} f(x)$$

とおくとき,

$$|f'(x)| \leq \frac{K}{c} \quad (a \leq x \leq b)$$

が成り立つことを示せ.



令和 7 年度 東北大学理学部数学科 編入学試験問題

英語

令和 6 年 9 月 6 日 (13 時 30 分から 14 時 30 分まで)

注意事項

- 1) 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと。
- 2) 問題は 2 題ある。全問に解答すること。
- 3) 解答は各問題ごとに指定された解答用紙を用いること。
- 4) 受験番号をすべての解答用紙の () 内に記入すること。また、氏名は書かないこと。
- 5) 問題冊子は、このページを含め全 3 ページである。

1 次の英文を日本語に訳せ.

英文は、著作権の都合上、省略します。

(出典: Clay Mathematics Institute, “Interview with Research Fellow Maryam Mirzakhani”)

2 次の文章を英訳せよ。ただし，文中の数式や記号はそのまま使用してよい。

V を有理数体上の有限次元ベクトル空間とする。 V の可逆な線形変換 T で $T^{-1} = T^2 + T$ を満たすものがあると仮定する。このとき， V の次元が 3 で割り切れることを示せ。

