令和８年度（2026 年度）
東北大学理学部編入学試験　問題
（数学科）

公表期限：2029 年３月末

東北大学理学部

令和 8 年度 東北大学理学部数学科 編入学試験問題

令和 7 年 9 月 5 日（9 時 30 分から 12 時 30 分まで）

注意事項

1) 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと．
2) 問題は 4 題ある．全問に解答すること．
3) 解答は各問題ごとに指定された解答用紙を用いること．
4) 受験番号をすべての解答用紙の（　）内に記入すること．また，氏名は書かないこと．
5) 問題冊子は，このページを含め全 3 ページである．

$\mathbb{R}$:　実数全体のなす集合

$\boxed{1}$ 以下で行列やベクトルは実数を成分とするものを考える．行列 X の転置行列を ${}^tX$ で表す．n は正の整数とする．以下の問いに答えよ．

(1) A は n 次対称行列とし，ある直交行列 P に対し ${}^tPAP$ が対角行列であるとする．このとき，P の各列は零ベクトルあるいは A の固有ベクトルであることを示せ．

(2) $n = 3$ で

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

とするとき，直交行列 P で ${}^tPAP$ が対角行列であるものを求めよ．

(3) A は n 次対称行列とし，任意の n 次列ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} \geq 0$$

が満たされるとする．このとき，(正則と限らない) ある n 次正方行列 P が存在して

$$A = {}^tPP$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{2}$ 以下で行列やベクトルは実数を成分とするものを考える．m, n は正の整数とする．以下の問いに答えよ．

(1) C は $m \times n$ 行列とし r をその階数とする．C のある r 次の小行列式は 0 ではなく，整数 $k > r$ に対してすべての k 次の小行列式は 0 であることを示せ．ただし，C の k 次の小行列式とは，C の k 個の行と k 個の列を選んで得られる k 次正方行列の行列式のことである．

(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は n 次の列ベクトルとし，${}^t\boldsymbol{a}, {}^t\boldsymbol{b}$ をそれぞれの転置とする．n 次の正方行列 A を $A = \boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}{}^t\boldsymbol{a}$ で定める．以下の問いに答えよ．

(i) A の階数は 2 以下であることを示せ．

(ii) さらに $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が 1 次独立とする．A の階数は 2 であることを示せ．

$\boxed{3}$ 広義積分に関する以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha > 1$ とする．関数 $G\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ は非負値連続関数であって，$x^\alpha G(x)$ は区間 $[0, +\infty)$ で有界であるとする．このとき, 次の広義積分は収束することを示せ．

$$\int_0^{+\infty} G(x)\, dx$$

(2) 関数 $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は非負値，かつ，2 回連続的微分可能であって，

$$H(x) > H(0) \quad (0 < x \leqq 1), \qquad H'(0) = 0$$

をみたすとする．このとき，次の広義積分は収束するか調べよ．

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{H(x) - H(0)}}$$

$\boxed{4}$ $f(t)$ は区間 $(0, +\infty)$ 上で定義された正値連続関数とする．区間 $(0, +\infty)$ 上で定義された正値関数 $g(x)$ が存在して，任意の $x > 0$ に対して，

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(xt)}{f(t)} = g(x)$$

が成り立つとする．以下の問いに答えよ．

(1) 任意の $x > 0$, $y > 0$ に対して，$g(xy) = g(x)g(y)$ が成り立つことを示せ．

(2) 関数 $g(x)$ は $x = 1$ を含むある開区間で微分可能であるとする．$a = g'(1)$ とおくとき，任意の $x > 0$ に対して，$g(x) = x^a$ であることを示せ．

(3) 各 $t > 1$ に対して，関数 $F(t)$ を

$$F(t) = \int_1^t f(s)\, ds$$

で定める．関数 $g(x)$ は $x = 1$ を含むある開区間で微分可能であるとする．$a = g'(1)$ とおく．$a > -1$ のとき，任意の $x > 0$ に対して，

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{F(xt)}{F(t)} = x^{a+1}$$

が成り立つことを示せ．